

<https://doi.org/10.23913/ride.v13i25.1347>

Artículos científicos

**Estudio socioeducativo de los principales errores que realizan los
alumnos en el tema de la integral definida como factor que
impide la competencia requerida**

***Socio-educational study of the main errors made by students in the subject
of the defined integral as a factor that prevents the required competence***

***Estudo socioeducativo dos principais erros cometidos pelos alunos na
disciplina do integral definido como fator que impede a competência
exigida***

Carlos Quiroz Lima

Instituto Tecnológico José Mario Molina Pasquel y Henríquez, Unidad Académica Puerto
Vallarta, México

carlosql2702@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-9921-3679>

Claudio Rafael Vásquez Martínez

Universidad de Guadalajara, México

crvasquezm@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-6383-270X>

Felipe Anastasio González González

Universidad Autónoma de Tamaulipas, México

fgonzale28@hotmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-1410-8616>

Joaquín Torres Mata

Universidad Autónoma de Tamaulipas, México

jtorresma@docentes.uat.edu.mx

<https://orcid.org/0000-0002-9298-8831>

Irma Carolina González Sánchez

Universidad Autónoma de Tamaulipas, México

carolinagonzalez327@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0003-2745-0178>

Resumen

En el presente trabajo se analizan algunos de los errores que realizan con más frecuencia al estudiar la integral definida los alumnos de Ingeniería en Gestión Empresarial (IGE) del Instituto Tecnológico José Mario Molina (ITJMM), así como la forma en que esto los afecta para alcanzar la competencia matemática requerida. Por ello, fue necesario investigar sobre tres elementos clave: competencia, competencia matemática y revisión en la literatura sobre los principales errores de los alumnos en el tema de la integral definida. En síntesis, al examinar los resultados de un examen diagnóstico aplicado, se observó que 89 % de los alumnos presentaban uno o más de estos tipos de problemas. Sin embargo, después de la aplicación del estudio este porcentaje se redujo a 47 %.

Palabras clave: errores, integral definida, socioeducativo.

Abstract

This paper analyzes some of the main mistakes frequently made by Business Management Engineering (IGE) students at the José Mario Molina Technological Institute (ITJMM) when studying the definite integral and the way in which they affect them in order to achieve math proficiency required. For this reason, it was necessary to investigate 3 key elements: competence, mathematical competence and to review the literature on the main errors that students make on the subject of the definite integral.

When examining the results of the diagnostic test, it was observed that 89% of the students presented one or more of these types of problems. However, after the application of the study this percentage was reduced to 47%.

Keywords: errors, definite integral, socio-educational.

Resumo

No presente trabalho, são analisados alguns dos erros que os alunos de Engenharia em Gestão Empresarial (IGE) do Instituto Tecnológico José Mario Molina (ITJMM) cometem com mais frequência ao estudar a integral definida, bem como a forma como isso afeta para atingir a competência matemática necessária. Por isso, foi necessário investigar três elementos-chave: competência, competência matemática e revisão da literatura sobre os principais erros dos alunos na disciplina de integral definida. Em resumo, ao analisar os resultados de um teste de diagnóstico aplicado, observou-se que 89% dos alunos apresentaram um ou mais desses tipos de problemas. No entanto, após a aplicação do estudo, esse percentual foi reduzido para 47%.

Palavras-chave: erros, integral definida, socioeducativa.

Fecha Recepción: Marzo 2022

Fecha Aceptación: Octubre 2022

Introducción

Los alumnos de la carrera Ingeniería en Gestión Empresarial (IGE) del Instituto Tecnológico José Mario Molina (ITJMM) al estudiar el tema de la integral definida comenten determinados errores que inciden no solo en un bajo porcentaje de aprobación, sino también en su práctica escolar. Al respecto, Pochulu (2009) asegura que el surgimiento de errores no sucede por azar, sino debido al contexto personal adquirido en los niveles educativos previos, así como al conjunto de instrucciones adquiridas en los procesos educativos.

Por tanto, la elaboración del presente estudio surge de la necesidad de disminuir el bajo rendimiento que los alumnos de la referida carrera presentan en la materia de cálculo integral. El objetivo fue analizar algunos de los principales errores que comenten con frecuencia en el tema de la integral definida y cómo esto los perjudica para alcanzar la competencia matemática requerida, para lo cual se replicó la metodología experimental que tiene sus bases en los conocimientos del docente en el aula (Simon, 2000).

Objetivo

Analizar algunos de los principales errores que comenten con frecuencia los alumnos de IGE del ITJMM en el tema de la integral definida y la forma en que estos los afectan para alcanzar la competencia matemática requerida

Hipótesis

Existen errores que cometen los alumnos de IGE del ITJMM al estudiar la integral definida y que actúan como factor que impide que alcancen la competencia matemática.

Preguntas de investigación

¿Qué factores impiden a los alumnos de IGE del ITJMM alcanzar la competencia matemática al estudiar la integral definida?

¿De qué manera los principales errores que comenten los alumnos de IGE del ITJMM en el tema de la integral definida afectan al logro de la competencia matemática requerida?

¿Cuáles son los principales errores que cometen los alumnos de IGE del ITJMM en el tema de la integral definida?

Marco teórico

A través de una investigación llevada a cabo en Chile, Espinoza *et al.* (2008) lograron identificar cuatro competencias necesarias en el currículo de los niveles medios y superiores en el área de matemáticas, cada una de las cuales están compuestas a su vez por un conjunto de procesos matemáticos. La tabla 1 muestra la resolución de problemas.

Tabla 1. Resolución de problemas

Proceso	Descripción del proceso
Entender el problema	Corresponde a la atribución de significado al enunciado, entender el contexto en el que se sitúa el problema.
Modelizar	Abarca los elementos de la construcción de un modelo: identificar el modelo, construir un modelo, reflexionar sobre el modelo.
Desarrollar y/o adaptar estrategias para resolver problemas	Corresponde a la identificación y/o construcción de una(s) estrategia(s) para abordar el problema: heurísticas, de razonamientos, casos particulares, etc.
Aplicar la estrategia para resolver el problema	Corresponde a la aplicación de la estrategia adoptada.
Interpretar la respuesta en contexto del problema	Una vez aplicada la estrategia y obtenida una respuesta, interpretar el resultado en términos del contexto del problema y responder la(s) pregunta(s) planteada en su enunciado.
Formular problemas	Corresponde a la formulación de un problema dadas algunas condiciones (a partir de unos datos, crear una situación problemática, etc.)

Fuente: Espinoza *et al.* (2009)

Las competencias matemáticas para la representación se mencionan en la tabla 2.

Tabla 2. Representación

Procesos	Caracterización de los procesos
Entender y utilizar las relaciones entre diversas representaciones de la misma entidad.	Considera entender y utilizar diferentes representaciones que pueden darse a una misma entidad matemática (o modelo).
Escoger y traducir representaciones en otras.	Traducir una representación de una entidad matemática en otra representación de la misma entidad.
Usar representaciones para interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos (construcción de modelo intermedio).	Atribuirle un significado a las representaciones y utilizarlas dentro de un contexto fenómenos físicos, sociales y matemáticos para interpretar datos.

Fuente: Espinoza *et al.* (2009)

En cuanto a las competencias de razonamiento y argumentación, se muestran en la tabla 3.

Tabla 3. Razonamiento y argumentación

Procesos	Caracterización de los procesos
Formular, investigar conjeturas matemáticas a partir de regularidades.	Formular e investigar conjeturas matemáticas que se construyen a propósito de ciertos datos provenientes de una situación intra o extra matemática.
Sintetizar, sistematizar y generalizar conjeturas matemáticas.	Considera la identificación de una expresión o modelo que exprese una conjetura, por ejemplo, la generalización de una propiedad matemática. También se refiere a la capacidad de sintetizar los aspectos relevantes de un tema matemático, rescatando las ideas nucleares.
Elegir y utilizar varios tipos de razonamiento y demostración.	Justificar y evaluar los procedimientos utilizados recurriendo a propiedades y a la lógica matemática. Frente a un mismo ente matemático utilizar distintos tipos de razonamiento para comprenderlo y/o para demostrarlo.
Desarrollar y evaluar argumentos.	Considera desarrollar una estructura argumentativa en el razonamiento, respecto a uno mismo o a los demás. Evalúa los elementos de un proceso de prueba: evidencia, justificaciones, demostraciones.
Comunicar su pensamiento matemático.	Explicar tanto de forma oral como escrita un razonamiento usado.

Fuente: Espinoza *et al.* (2009)

La tabla 4 muestra las competencias para el cálculo y manipulación de expresiones.

Tabla 4. Cálculo y manipulación de expresiones

Procesos	Caracterización de los procesos
Descifrar expresiones e interpretar matemáticas y/o geométricas.	Considera dar sentido a una expresión matemática o geométrica en un contexto determinado.
Usar y/o manipular expresiones matemáticas.	Considera la manipulación de las diferentes expresiones matemáticas, siguiendo las leyes de estructura matemática a la que pertenece.
Calcular y/o cuantificar.	Referido al cálculo: desarrollo de las operaciones, aplicación de una técnica, etc.
Comunicar la manipulación de expresiones y cálculos.	Describir de forma oral o escrita lo que se ha hecho al desarrollar un procedimiento o los cálculos llevados a cabo.

Fuente: Espinoza *et al.* (2009)

Metodología

El presente trabajo está sustentado principalmente en un diseño experimental que se basa en los conocimientos del profesor y es llevado al aula TDE (Simon, 2000). Distintas investigaciones de diseño tienen como objetivo principal “observar y comprender los diversos contextos naturales que se viven en las aulas, con el fin de mejorar la realidad educativa a través de un diseño instruccional específico y definido” (Molina *et al.*, 2011, p. 75).

Los investigadores que aplican esta metodología concuerdan en que para lograr el binomio enseñanza-aprendizaje se deben analizar los entornos reales del aula y elaborar un diseño específico que incluya estrategias y herramientas de enseñanza para ayudar a la sensibilización del aprendizaje y la evaluación.

De igual manera, los experimentos de diseño surgen como un dialecto emergente que busca apoyar argumentos contruidos alrededor de los resultados de la intervención en la práctica, así como la innovación activa de contextos educativos para vislumbrar las técnicas de enseñanza y aprendizaje en los que el docente forma parte.

Por su parte, Confrey (2006) define el diseño de experimentos como prácticas educativas extensas que parten del currículo, las cuales son elaboradas mediante una serie de tareas secuenciadas enfocadas en algún tópico desarrollando habilidades mediante la interacción de los alumnos entre sus pares y docente.

Al estudiar el contexto de la clase y al llevar a cabo la investigación, se requiere de la investigación de más de una variable. Para Molina *et al.* (2011) el aprendizaje es un anómalo y este se desenvuelve bajo la coacción de diversos factores, así como la interacción de diferentes personajes.

Dentro de los objetivos de las investigaciones de diseño está el determinar cómo el aprendizaje es afectado por variables que intervienen en la clase tales como:

- En cuanto al estudio del argumento de la clase, es necesario incorporar al menos una variable cualitativa a lo largo de la investigación, de tal forma que describa el desarrollo del aprendizaje por parte de los alumnos en el aula y en cada una de las sesiones que dure la investigación.
- La observación del contexto en el aula día a día permite dar respuesta a las preguntas sobre el aprendizaje: ¿cómo sucede?, ¿a qué se debe? y ¿por qué sucede?
- La colaboración entre los participantes e investigador dentro del entorno educativo es vital.

- La recolección de datos por medio de métodos cualitativos permite elaborar y dirigir trayectorias de aprendizaje para el grupo.
- Es necesaria la presencia del investigador en el aula a lo largo del estudio.
- La recolección de datos en la aplicación del diseño de investigación permite obtener información sobre el alcance del aprendizaje logrado, así como de los beneficios de los medios utilizados.

Dentro del campo de la didáctica matemática se está utilizando ampliamente el paradigma metodológico de la investigación educativa. Molina (2007) sustenta esta afirmación al comentar la divulgación de estudios que fueron elaborados con este diseño en diversas publicaciones, así como en grupos de investigadores, como Design-Based Research Collective.

En los trabajos con diseño experimental la duración, el espacio y las condiciones varían dependiendo del número de participantes. Cobb *et al.* (2003) comentan sobre la existencia de diferentes tipos de diseño de experimentos dentro de los cuales podemos mencionar:

- En el diseño de experimentos “uno a uno” se conforman dos pequeños grupos: uno de investigación y otro de alumnos, cuyo objetivo es elaborar una escala de aprendizaje en el aula mediante una secuencia de sesiones de enseñanza-aprendizaje, de tal forma que pueda ser analizada con mayor profundidad (Cobb y Steffe, 1983).
- De igual manera se encuentra el diseño de experimentos de grupo. En este interviene un grupo de alumnos quienes colaboran con el docente, el cual puede formar parte del grupo mismo (Cobb, 2000; Confrey, 2006; Confrey y Lachance, 2000; Gravemeijer, 1994).
- Los profesores en formación también se ven beneficiados por este tipo de experimentos, pues son apoyados por un equipo de investigación que les ayuda a organizar y ampliar sus conocimientos (Simon, 2000)
- El diseño de experimentos también se ha aplicado a los profesores en activo. Aquí profesores e investigadores colaboran juntos para desarrollar el conocimiento formando una comunidad profesional (Stein *et al.*, 1999).

Análisis

El inicio del trabajo se llevó a cabo la presentación del investigador con dos grupos de IGE. Se destacó que este no era el primer encuentro del investigador con los estudiantes de ambos grupos, ya que anteriormente él les había impartido la asignatura de Estadística Descriptiva I y II, por lo que conoce algunas características de ellos, de ahí que se sientan con mayor confianza a lo largo del proyecto.

Desarrollo de la primera sesión

La sesión se efectuó en el auditorio del ITJMM, donde se reunió a los dos grupos que participarían en el curso taller.

En esta sesión participaron 52 alumnos de los dos grupos de la carrera de IGE del ITJMM; habitualmente, ambos grupos tienen un promedio de asistencia de 90 %. Las sesiones posteriores para el grupo 1 se impartieron todos los jueves en un horario de 10 a. m. 12 m., mientras que para el grupo 2 los viernes en el mismo horario.

Al inicio de la sesión el investigador explicó la dinámica del curso taller, el cual duraría seis sesiones. El propósito era enseñar cuándo un problema matemático se podía resolver o no con el uso de las integrales definidas, para lo que se usó un *software* en el equipo de cómputo de cada uno.

Desarrollo de la segunda sesión

A esta sesión asistieron 24 estudiantes del grupo 1 y 22 del grupo 2, por lo que se formaron equipos de 12 y 11 personas, respectivamente. Aunque se tenían planeadas dos horas de sesión, con el primer grupo se prolongó cinco minutos.

La dinámica de las sesiones se desarrolló en dos fases: en la primera los alumnos trabajaban de forma individual y en la segunda de manera grupal. En la primera fase, lo hicieron de forma más segura porque ya conocían la dinámica de trabajo. Al leer los ejercicios, surgieron dudas y se sintieron más cómodos expresando sus inquietudes con el docente. En ocasiones se veía a los alumnos intercambiar opiniones con sus compañeros sobre los ejercicios propuestos. El investigador les indicó que trataran de resolver todo aplicando el conocimiento que tenían.

Después del trabajo individual, el investigador les pidió que se ubicaran en equipos, preferentemente con el compañero que escogieron en la primera sesión. También se les indicó que podían intercambiar ideas y comentarios para dar respuesta a las preguntas. El

investigador se acercaba a cada equipo para escuchar el intercambio de opiniones y para responder los ejercicios. Un ejemplo de dicho intercambio entre el investigador (I) y los estudiantes (E) es el siguiente:

(E): ¿Se puede calcular el área mediante aproximaciones?

(I): Claro, se pueden utilizar los conocimientos previos que se tengan de otras materias.

(E): Ah, entonces se puede utilizar figuras geométricas.

(I): Sí, siempre y cuando se recuerde la fórmula para calcular el área de la figura geométrica que recuerde.

(E): Por ejemplo, el área debajo de la curva se puede aproximar mediante un rectángulo en la parte inferior, y mediante un triángulo en la parte superior.

(I): Muy bien, esa sería una aproximación, pero el resultado no sería exacto; ahora tienen que pensar en la forma de cómo ser más precisos a la hora de encontrar el área.

Desarrollo de la tercera sesión

Al inicio de la sesión, el investigador comentó que se realizaría un cuestionario para identificar los posibles patrones de errores que generalmente cometen los alumnos al momento de estudiar la materia de cálculo integral. Asimismo, se procuró detectar patrones y técnicas de enseñanza para ayudar a los alumnos en el aprendizaje de esta materia. El investigador hizo énfasis en que respondieran a cada una de las preguntas de forma veraz. Es importante señalar que el cuestionario original fue modificado debido a los resultados obtenidos en el examen diagnóstico.

En la primera pregunta se les solicitaba que escribieran sobre cuáles eran los principales errores que cometían al estudiar el tema de la integral definida. Los resultados demuestran que 35 % acepta que se les dificulta el tema por falta de conocimiento de las matemáticas en general; las causas de distracción ocupan el segundo lugar con 22 % (p. ej., el fútbol y el celular). Asimismo, muy parecidos son los porcentajes en la falta de atención y de compromiso (20 % y 18%, respectivamente) debido al aburrimiento y el tipo de maestro.

Los dos principales errores que cometen son de razonamiento y de cálculo; sobre el primero dicen que no comprenden el concepto de integral definida, y sobre el segundo que aún tienen problemas algebraicos, pese a que es el método preferido para resolver integrales.

Los errores de razonamiento se deben a que en cursos anteriores de matemáticas no se ponen en práctica problemas o situaciones que los motiven al razonamiento, a la argumentación y a la construcción de modelos matemáticos para encontrar su solución e

interpretar adecuadamente. Por eso, es necesario que en cursos de matemáticas se incorporen actividades que incluyan el desarrollo de procesos para el desarrollo de contenidos vistos desde una perspectiva de competencias matemáticas.

Algunas de las características de las competencias matemáticas —de acuerdo con Niss (2002)— son la importancia de una situación problemática que dé pie a generar una serie de razonamientos, habilidades y actuaciones en el aula. Es decir, buscar que “todos” los alumnos sean capaces de desplegar un conjunto de actitudes, capacidades y conocimientos relativos a las matemáticas. Asimismo, tipos de estrategias para desarrollar tareas matemáticas en un contexto de competencias tales como un contexto de resolución de problemas, actividades de investigación o trabajo por proyectos

En cuanto a los errores de cálculo —y pese a la utilización mecánica, algorítmica y memorística de la definición de la integral definida—, no logran establecer una conexión entre el pensamiento algebraico, geométrico y analítico. Tienen problemas para interpretar las gráficas de áreas bajo curvas y asocian el concepto de integral solo con el de área, pero aislada de otros contextos, lo que refleja dificultades para aplicar las propiedades de la integral definida.

Otros estudios han demostrado el predominio del modo algebraico sobre el gráfico que tienen los estudiantes al resolver tareas de cálculo integral. De hecho, hay un dominio de los procedimientos algorítmicos frente a los aspectos conceptuales. Al respecto, Giménez y Camacho Machín., 2003, p. 142). ponen de manifiesto que existe “un nivel relativamente bueno en la manipulación de los algoritmos algebraicos que aparecen en los cálculos de primitivas de funciones y, sin embargo, dificultades en la conceptualización de los procesos de límite asociados al concepto de integral definida”.

En cuanto a los aspectos académicos del curso de cálculo integral, los alumnos manifiestan que la unidad que más les costó trabajo de entender fue la relacionada con las aplicaciones de la integral, seguido del tema de integrales definidas y métodos de integración.

Al preguntarles a los alumnos sobre por qué se les dificulta resolver problemas que incluyan la aplicación de la integral, manifestaron que en su mayoría son de cálculo y se aplican distintas fórmulas (por ejemplo, obtener volúmenes). En este sentido, indican que sus maestros solo emplean sus propios apuntes como estrategias de aprendizaje y en ocasiones utilizan libros como material didáctico.

Por último, y pese a que algunos de los alumnos del taller ya cursaron la materia de cálculo integral, señalaron que no tenían claro los contenidos conceptuales de la materia, así como el concepto de la integral definida.

Desarrollo de la cuarta sesión

Siguiendo con los objetivos planeados para esta sesión, se enseñaron los ejemplos del diseño matemático planeados desde el inicio del presente trabajo, solo que a estos se les añadieron las gráficas auxiliares para ver mejor el área por calcular debajo de la función. Esto se debió a los resultados mostrados por los alumnos en las sesiones anteriores en cuanto a que se les dificultaba visualizar los conceptos de la integral y a la falta de herramientas tecnológicas o material didáctico para su aprendizaje.

Luego se mostró el ejemplo planificado para la sesión, lo cual ocurrió sin mayores contratiempos, pues los alumnos ya dominaban los conceptos básicos del *software* y graficaban las funciones que les indicaba el problema que se les mostraba mediante el proyector. Al ir replicando en sus equipos el problema planificado, entre todos preguntaban y respondían acerca de cómo se podía mejorar la imagen o modificar el dominio de la función. Con esto se procuró que los alumnos desarrollaran las siguientes competencias matemáticas: resolución de problemas, representación, razonamiento y argumentación, cálculo y manipulación de expresiones.

Desarrollo de la quinta sesión

A lo largo de la quinta sesión se enseñó mediante ejemplos la aplicación de la propuesta didáctica. Para ello, se identificaron las variables continuas y discretas, con lo cual se favorecieron las competencias de pensar y razonar, así como el trabajo en equipo, lo cual sucedió a lo largo de los ejemplos programados.

El diseño matemático se presentó a los alumnos mediante diapositivas. Se les indicó que estas contemplan un conjunto de propiedades que comprenden la idea de integral definida. Asimismo, se les explicó que al alcanzar las habilidades del diseño y al aplicarlas en un problema podrían identificar si este tenía solución o no mediante la aplicación de la integral definida. La propuesta que hace Hernández (2000) para la caracterización de los problemas que pueden resolverse mediante el uso de la integral definida es la siguiente.

Identificación de los ejercicios que pueden solucionarse mediante la aplicación de la integral definida.

Sea Q un conjunto de problemas que compartan las mismas características, P el conjunto de las respuestas de los mencionados problemas y F un conjunto de funciones en los reales definidas en cada uno de los puntos que conforman el intervalo $[a, b]$, donde para cada problema $q \in Q$ su solución $p \in P$ está relacionada con una función $f \in F$ en $[a, b]$, es decir, a $\int_a^b f(x) dx$ siempre y cuando se cumplan con las siguientes propiedades:

- a) La función f está definida en todo punto $[a, b]$ siendo continua en $[a, b]$.
- b) Para este tipo de problemas, si se asocia una función constante en $[a, b]$; digamos una función h tal que $h(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$, entonces la solución sería $s = c(b - a)$.
- c) La solución p de un problema con estas características, en el intervalo $[a, b]$, no cambia si se realizan distintas particiones en el intervalo $[a, b]$, por lo que la solución del problema es la suma de las soluciones del problema en cada uno de los subintervalos en que se ha particionado el intervalo $[a, b]$.
- d) Para esta clase de problemas, mientras sea mayor la imagen de la función asociada, la solución p del problema será mayor.

Desarrollo de la sexta sesión

Al inicio de la sesión el investigador les señaló la importancia de implicarse en la actividad del día para determinar la eficiencia del diseño matemático en las integrales definidas. Se les recordó, además, que en las sesiones anteriores se les había mostrado el procedimiento por seguir en el diseño matemático, así como el uso del *software* para determinar cuándo se podía encontrar la solución a un ejercicio mediante la aplicación de una integral definida, identificando las variables continuas o discretas. Se les explicó que si el problema cumplía con todos los requisitos, entonces debían caracterizar la integral mediante las sumas de Reimann (Leithold, 1998). Asimismo, se les señaló que la actividad constaba de cinco preguntas que debían desarrollar con lo comentado anteriormente y que en principio trabajarían de forma individual y posteriormente en equipo con la misma persona que lo hicieron en las sesiones anteriores.

Luego, el investigador les entregó el cuestionario y se les preguntó si tenían claro lo que iban a hacer. Varios estudiantes contestaron que no, por lo que se les explicó nuevamente la forma de trabajo. Aclaradas las dudas, comenzaron a trabajar de forma individual durante los 30 minutos que duró la primera etapa; al finalizar el tiempo, se les preguntó si tenían alguna duda relacionada con lo que se les solicitaba en cada ejercicio.

Posteriormente, el docente dio inicio a la segunda etapa (trabajo colaborativo) e indicó que era necesario seguir las siguientes indicaciones:

- Respetar las ideas y sugerencias de los participantes sin importar lo ilógica que les parezcan; muchas veces se tiene la idea de cómo resolver el problema, pero les cuesta trabajo expresarla.
- Se explicó que el trabajo colaborativo servía para apoyarse en el compañero, por lo que se podían expresar y escuchar las ideas en torno al problema propuesto. Así, se podía lograr una respuesta más completa y compleja que la sugerida por una sola persona.
- Trabajar en equipos de dos personas dando prioridad a los equipos formados en la primera sesión. Si no se encontraban los participantes del equipo original, entonces se podría formar uno nuevo.

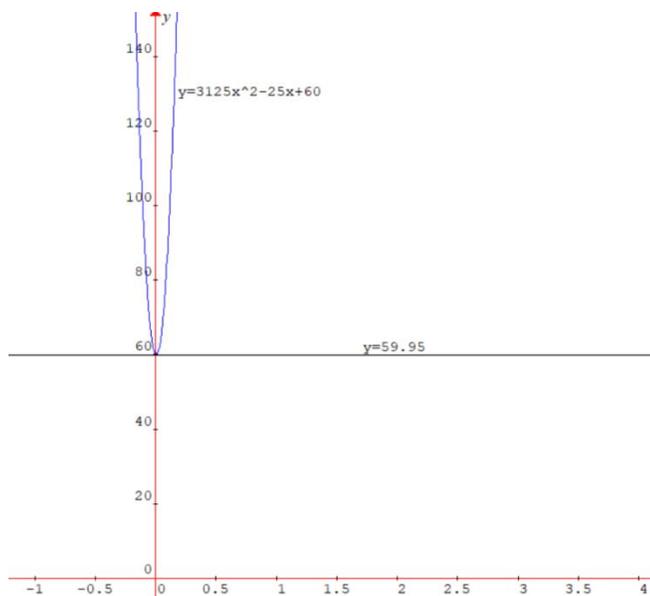
Exposición de una pregunta con el procedimiento por equipo de trabajo.

1. La velocidad promedio de una bicicleta en un periodo de 4 horas equivale a la velocidad mínima de un automóvil en un intervalo de tiempo similar. En tanto la velocidad del automóvil medida en kilómetros por hora se mide mediante la función $f(x) = 3,125x^2 - 25x + 60$, siendo x las horas que iban transcurriendo, ¿cuál fue el espacio recorrido por la bicicleta durante las 4 horas?

Observación:

- a) En este caso, es importante identificar primero, la función que se desea saber si es integrable bajo el método propuesto, y como la velocidad promedio del ciclista es equivalente a la velocidad mínima del vehículo, se debe de obtener el punto mínimo de la función del vehículo, el cual es $x = 0.004$ donde $f(0.004) = 59.95$. Así, la función del ciclista es $f(x) = 59.95$ ambas gráficas se muestran en la figura 1 en un intervalo $[0,4]$

Figura 1. Gráficas de las funciones $f(x) = 3,125x^2 - 25x + 60$; $f(x) = 59.95$



Fuente: Elaboración propia

- b) Como la función asociada al ciclista es constante, se puede obtener el espacio recorrido en el intervalo $[0, 4]$. Es decir:

$$S[0,4]$$

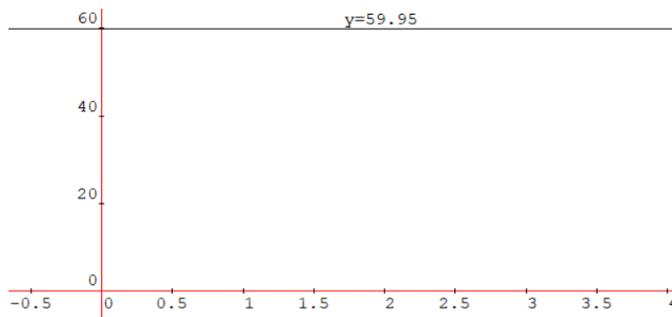
$$f(4)(4 - 0)$$

$$59.95 * 4$$

$$239.8$$

tal y como se muestra en la figura 2.

Figura 2. Gráfica de la función $f(x) = 59.95$

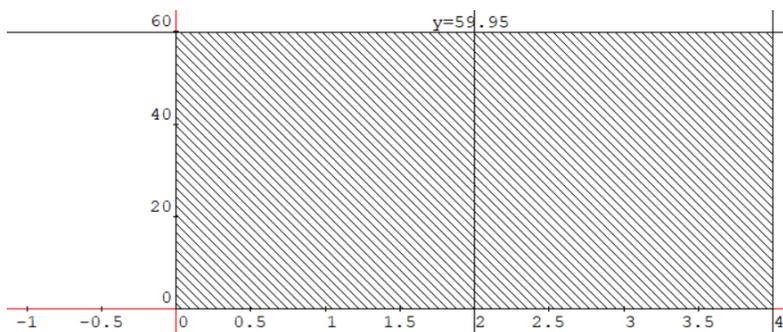


Fuente: Elaboración propia

- c) Por otra parte, mientras más grande sea el área obtenida por la función, mayor será la solución del problema.

- d) Ahora, si se obtienen particiones del intervalo $[0, 4]$, digamos en $[0, 2]$ y $[2, 4]$, y se calcula la distancia recorrida por el ciclista en cada uno de los subintervalos de la partición, la suma de las distancias recorridas en cada uno de los subintervalos, será siempre igual al aumento total en el intervalo $[0, 4]$ como se muestra en la figura 3.

Figura 3. Gráfica de la función $f(x) = 59.95$ con $n = 2$



Fuente: Elaboración propia

Es decir:

$$\begin{aligned}
 &S[0,2] + S[2,4] \\
 &f(2)(2 - 0) + f(4)(4 - 2) \\
 &59.95(2) + 59.95(2) \\
 &119.9 + 119.9 = 239.8
 \end{aligned}$$

que es en la solución.

Resultados

La investigación se centró en dos preguntas:

1. ¿Cuáles eran los principales errores que cometían los alumnos en el tema de integral definida? Para ello, se diseñó y aplicó una secuencia de seis sesiones de trabajo en el aula:
 - Para construir los nuevos conocimientos fue necesario retomar los conocimientos previos, asociando la resolución de problemas a una argumentación y representación de ellos.
 - La resolución de los problemas matemáticos propuestos debían tener un enfoque práctico y de aplicación inmediata.
 - Se dio prioridad al trabajo colaborativo desarrollando las sesiones en un contexto natural que ayudara a la formación de futuros ingenieros en gestión empresarial del ITJMM.

2. ¿Cuáles eran los principales errores que impedían a los alumnos de IGE del ITJMM alcanzar las competencias matemáticas requeridas en el tema de la integral definida? En este caso, se priorizó los esfuerzos en dos vertientes de contribución:
- El uso y aplicación de la metodología TDE con énfasis en el logro de las competencias matemáticas requeridas.
 - El trabajo en equipo para desarrollar las habilidades cognitivas requeridas en las actividades.

Primera pregunta: ¿cuáles eran los principales errores que cometían los alumnos de IGE del ITJMM en el tema de integral definida?

Esta pregunta se analizó en dos sesiones: la primera al momento de aplicar el examen diagnóstico para delimitar el procedimiento que se debía seguir. En la segunda sesión se empleó una encuesta para que los alumnos señalaran los principales errores al estudiar el tema de la integral definida.

Ambos instrumentos sirvieron para identificar tres tipos de errores relacionados con el cálculo, el proceso de solución de problemas y la aplicación de algoritmos inadecuados. Los resultados del examen diagnóstico indicaron que 89 % de los alumnos presentaban uno o más de estos tipos de problemas. Sin embargo, después del uso de la herramienta didáctica este porcentaje se redujo a 47 %.

Para el caso de los errores cometidos durante el proceso de solución de un problema, se constató —antes de la aplicación del instrumento— que presentaban dificultades algebraicas (p. ej., no distinguían cuándo una función era discontinua en un intervalo) y no sabían si la variable que se involucra en un problema es del tipo discreta o continua. Los datos demuestran que 64 % de los alumnos cometen errores a lo largo del proceso de solución, mientras que el 36 % restante es más consistente con los procedimientos de cálculo.

Al concluir la aplicación del instrumento y después de insistir sobre la identificación del tipo de variable involucrada en los problemas y de los cuidados algebraicos, el porcentaje disminuyó a 42 %. En este caso, también se pudo constatar que los alumnos cometen este tipo de errores principalmente por falta de madurez matemática, y de lectura y comprensión de los problemas.

Muy similar es la respuesta para el desconocimiento o aplicación de las reglas. Antes de la aplicación del instrumento solo 21 % de los alumnos pudieron responder satisfactoriamente a las preguntas 2 y 3 del examen diagnóstico. Como ejercicio y a lo largo

del proceso de práctica los mismos problemas fueron resueltos por los alumnos en las preguntas 5 y 6, respectivamente. En esta ocasión, 69 % de los alumnos contestaron adecuadamente a las preguntas.

La aplicación del instrumento causó en los estudiantes un gran interés y motivación en el aula, lo que se evidenció en la participación y formación constante de preguntas. Su aplicación surge de la necesidad de que los alumnos identifiquen contenidos y conceptos matemáticos en la búsqueda de soluciones a problemas reales y que, tras su análisis, puedan afirmar si el problema puede modelarse o no mediante la integral definida.

A pesar de que los porcentajes de errores cometidos por los alumnos disminuyeron con la aplicación del material propuesto, siguen siendo elevados. Sería arriesgado, por tanto, pensar que con este material didáctico u otro el porcentaje de errores llegaría a cero. Sin embargo, pudiese disminuir si se tuviera la oportunidad de utilizar más horas en la aplicación de este material.

Segunda pregunta: ¿cuáles factores impiden a los alumnos de IGE del ITJMM alcanzar las competencias matemáticas requeridas en el tema de la integral definida?

Para dar respuesta a esta pregunta se determinaron dos fuentes de contribución:

- El formato de la metodología TDE diseñado para el logro de las competencias requeridas.
- El esfuerzo que implica el trabajo en equipo para la elaboración de las actividades cognitivas.

La elaboración de este trabajo se describe mediante el esfuerzo de los equipos en busca de las expectativas de aprendizaje organizados en seis sesiones en el aula y vinculando los objetivos de trabajo con las competencias matemáticas. De esta forma, las suposiciones que se planearon en la elaboración de las actividades y la participación activa mostrada por los alumnos a lo largo del proyecto fueron contrastadas.

Se observó que, de forma particular, el contexto de ciertas actividades podrían influir en los objetivos del logro de una o varias competencias; sin embargo, en la práctica esto no ocurrió. Es decir, la competencia no fue alcanzada o los indicadores no eran acordes con la complejidad de las actividades, lo que significa que aunque un ejercicio se haya catalogado como de reflexión, los estudiantes de IGE del ITJMM trabajaron en él solo como un ejercicio más.

En síntesis, el procedimiento para lograr las competencias matemáticas requeridas permitió obtener información sobre la aportación del estudio al logro de las expectativas deseadas en el aprendizaje. Se recuerda que las expectativas de aprendizaje, los objetivos y las competencias de cada ejercicio planteado fueron elaborados tomando en cuenta las resoluciones de los resultados obtenidos de forma colaborativa. Por ello, no se asegura el logro de la competencia de cada uno de los estudiantes o que alguno de ellos mostrara un avance o fuera promovido. De hecho, tampoco se menciona que la totalidad de los miembros que conformaron los equipos hayan logrado tal objetivo.

La aportación que se presenta en este estudio muestra un escenario de la conformación de equipos de trabajo que dan evidencia sobre las expectativas de aprendizaje propuestas. En cuanto a la pregunta sobre la promoción de la competencia matemática por parte del alumno, se considera que esta solo se logrará si se toman en cuenta los conocimientos previos adquiridos. En este sentido, el mejor contexto para el logro de dichas competencias es el aula.

La competencia matemática promueve el uso de la conciencia generando y manejando las capacidades y conocimientos bajo una perspectiva de competencia personal que incluye la cooperación, el manejo y aplicación de estrategias de aprendizaje y la autoevaluación propia durante el aprendizaje.

Para la promoción de la competencia matemática es necesario la elaboración y diseño de actividades que contemplen ejercicios numéricos de aplicación inmediata en contextos reales y funcionales. Por otro lado, se considera que para que los alumnos logren la madurez matemática requerida es necesaria una reflexión sobre el curso que debe de tomar la educación superior en la formación de los alumnos para que estos sean competentes matemáticamente.

Discusión

Diversos autores han trabajado en la búsqueda de identificar las dificultades y errores que tienen los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas. Rico (1995) declara que en los noventa estas se caracterizaban por la organización de currículos de matemáticas y objetivos, así como de ciertas corrientes de la psicología y la pedagogía. Las investigaciones de Brousseau *et al.* (1986) describen que los errores cometidos por parte de los alumnos muestran un patrón consistente en el uso de procedimientos equivocados. El empleo de lecciones con problemas es utilizado para descubrir concepciones erróneas y de esta forma

elaborar discusiones con el fin de encontrar una resolución (Bell, 1986). Borassi (1987) y otros autores utilizan los errores cometidos por el alumno como instrumento de motivación para la elaboración de actividades donde se planteen problemas y su resolución.

Otros estudios referentes al análisis de errores se enfocan en el lenguaje algebraico. Por ejemplo, Booth (1984) manifiesta que muchos de estos errores son atribuidos a aspectos tales como la transición de la aritmética al álgebra y la naturaleza de las respuestas en la comprensión de la aritmética y el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos. En Ruano *et al.* (2008) se analizan los errores que cometen los alumnos en los aspectos operacionales, estructurales y procesuales cuando trabajan situaciones problemáticas que implican alguno de los procesos de sustitución formal, generalización y modelización. Por otra parte, también se han realizado investigaciones que tratan sobre el origen y causa de los errores desde el punto de vista de las dificultades inherentes a las matemáticas, así como del estudio de las dificultades que conllevan al proceso de enseñanza-aprendizaje (Socas, 2007).

El trabajo colaborativo también formó parte del presente trabajo. En este sentido Pérez (2007) comenta que es un proceso social donde no solo existe interacción entre los alumnos, sino también entre alumno y profesor. Por eso, en Coll y Sánchez (2008) se discuten aspectos básicos por tener en cuenta en el desarrollo de modelos para el análisis de la interacción y la práctica educativa en el aula.

En cuanto a los errores cometidos durante el proceso de solución de un problema, se detectaron dos muy comunes: errores de tipo algebraico (p. ej., no distinguir cuándo una función era discontinua en un intervalo) y no saber si la variable que se involucraba en un problema era del tipo discreta o continua. El primero se distingue más en los problemas de tipo algebraico y el segundo se puede apreciar en la solución de problemas reales, donde se requiere o no de una integral definida.

Conclusiones

La metodología utilizada en este trabajo sirvió no solo para conocer las actuaciones de los alumnos en el tema de la integral definida, sino también para poder orientarlos en su proceso de aprendizaje, lo cual fue simplificado gracias a que el investigador permaneció en el aula desde el primer día de clase y compartió con los estudiantes el trabajo de la asignatura. La participación del docente en cada una de las sesiones le permitió conocer más a fondo las etapas de trabajo, lo que fue útil para preparar explicaciones más precisas debido a las actuaciones manifestadas por los alumnos sobre las influencias demostradas.

En resumen, ha sido positivo trabajar con dos grupos de alumnos de IGE del ITJMM. En efecto, la aplicación de esta metodología permitió al investigador diseñar y aplicar cada una de las sesiones con el fin de ofrecer un mayor beneficio en el aprendizaje de los estudiantes.

Futuras líneas de investigación

De este estudio se desprenden las siguientes líneas de investigación:

- Estudios en aulas de clase en preparatoria y universidad sobre los errores que cometen los estudiantes en cálculo integral.
- Estudios locales en centros educativos sobre los efectos de la pandemia y el periodo de pospandemia donde los discentes realizan errores sobre cálculo integral.

Referencias

- Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, 4(3), 199-208.
- Boothe, L. (1984). Algebra: Children's Strategies and Errors: NFER-Nelson. BoothAlgebra: Children's Strategies and Errors1984.
- Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. For the learning of *Mathematics*, 7(3), 2-8.
- Brousseau, G., Davis, R. B., & Werner, T. (1986). Observing students at work. In *Perspectives on mathematics education* (pp. 205-241). Springer.
- Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers.
- Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher*, 32(1), 9-13.

- Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for research in mathematics education*, 14(2), 83-94.
- Coll Salvador, C., & Sánchez Miguel, E. (2008). Presentación: El análisis de la interacción alumno-profesor: líneas de investigación. *Revista de educación*.
- Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. *na*.
- Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative Teaching Experiments through Conjecture-Driven Research Design.
- Espinoza, L. (2008). Análisis de las competencias matemáticas en NB1. Caracterización de los niveles de complejidad de las tareas matemáticas.
- Giménez, C. A., & Machin, M. C. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. Edición Especial: *Educación Matemática*, 135.
- Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for research in Mathematics Education*, 25(5), 443-471.
- Hernández, R. (2000). Propuesta didáctica para identificar y resolver los problemas que requieren del cálculo de una integral definida o de la derivada de una función real en un punto Tesis de Doctorado en Ciencias Pedagógicas, Universidad de La Habana, Ciudad ...].
- Leithold, L. (1998). *El cálculo* (Vol. 343). Oxford University Press México.
- Molina González, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 75-88.
- Niss, M. (2002). Mathematical competencies and the learning of mathematics. *The Danish*.
- Pochulu, M. (2009). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. *Colección Digital Eudoxus*(8).
- Pérez, M. M. (2007). El trabajo colaborativo en el aula universitaria. *Laurus*, 13(23), 263-278.
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.
- Ruano Barrera, R. M., Socas Robayna, M. M., & Palarea Medina, M. d. I. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*.

- Simon, M. (2000). Research on mathematics teacher development: The teacher development experiment. In Handbook of research design in mathematics and science education (pp. 335-359). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico.
- Stein, M. K., Smith, M. S., & Silver, E. (1999). The development of professional developers: Learning to assist teachers in new settings in new ways. Harvard educational review, 69(3), 237-270.

Rol de contribución	Autor(es)
Conceptualización	Carlos Quiroz Lima (Principal), Claudio Rafael Vásquez Martínez (Principal), Felipe Anastasio González González (Igual), Joaquín Torres Mata (Igual), Irma Carolina González Sánchez (Igual).
Metodología	Carlos Quiroz Lima (Principal), Claudio Rafael Vásquez Martínez (Principal), Felipe Anastasio González González (Igual), Joaquín Torres Mata (Igual), Irma Carolina González Sánchez (Igual).
Software	Carlos Quiroz Lima (Principal), Claudio Rafael Vásquez Martínez (Principal), Felipe Anastasio González González (Igual), Joaquín Torres Mata (Igual), Irma Carolina González Sánchez (Igual).
Validación	Carlos Quiroz Lima (Principal), Claudio Rafael Vásquez Martínez (Principal), Felipe Anastasio González González (Igual), Joaquín Torres Mata (Igual), Irma Carolina González Sánchez (Igual).
Análisis formal	Carlos Quiroz Lima (Principal), Claudio Rafael Vásquez Martínez (Principal), Felipe Anastasio González González (Igual), Joaquín Torres Mata (Igual), Irma Carolina González Sánchez (Igual).
Investigación	Carlos Quiroz Lima (Principal), Claudio Rafael Vásquez Martínez (Principal), Felipe Anastasio González González (Igual), Joaquín Torres Mata (Igual), Irma Carolina González Sánchez (Igual).

Recursos	Carlos Quiroz Lima (Principal), Claudio Rafael Vásquez Martínez (Principal), Felipe Anastasio González González (Igual), Joaquín Torres Mata (Igual), Irma Carolina González Sánchez (Igual).
Curación de datos	Carlos Quiroz Lima (Principal), Claudio Rafael Vásquez Martínez (Principal), Felipe Anastasio González González (Igual), Joaquín Torres Mata (Igual), Irma Carolina González Sánchez (Igual).
Escritura y preparación del borrador original	Carlos Quiroz Lima (Principal), Claudio Rafael Vásquez Martínez (Principal), Felipe Anastasio González González (Igual), Joaquín Torres Mata (Igual), Irma Carolina González Sánchez (Igual).
Escritura, revisión y edición	Carlos Quiroz Lima (Principal), Claudio Rafael Vásquez Martínez (Principal), Felipe Anastasio González González (Igual), Joaquín Torres Mata (Igual), Irma Carolina González Sánchez (Igual).
Visualización	Carlos Quiroz Lima (Principal), Claudio Rafael Vásquez Martínez (Principal), Felipe Anastasio González González (Igual), Joaquín Torres Mata (Igual), Irma Carolina González Sánchez (Igual).
Supervisión	Carlos Quiroz Lima (Principal), Claudio Rafael Vásquez Martínez (Principal), Felipe Anastasio González González (Igual), Joaquín Torres Mata (Igual), Irma Carolina González Sánchez (Igual).
Administración de proyectos	Carlos Quiroz Lima (Principal), Claudio Rafael Vásquez Martínez (Principal), Felipe Anastasio González González (Igual), Joaquín Torres Mata (Igual), Irma Carolina González Sánchez (Igual).
Adquisición de fondos	Carlos Quiroz Lima (Principal), Claudio Rafael Vásquez Martínez (Principal), Felipe Anastasio González González (Igual), Joaquín Torres Mata (Igual), Irma Carolina González Sánchez (Igual).