Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo
ISSN 2007 - 7467

https://doi.org/10.23913/ride.v13i25.1245

Artículos científicos

La didáctica del cálculo integral: el caso de los procedimientos de integración

The Didactic of Integral Calculus: The Case of Integration Procedures

A didática do cálculo integral: o caso dos procedimentos de integração

Mario. A. Sandoval Hernández
Universidad de Xalapa, México
ma.sandoval@ux.edu.mx
Centro de Bachillerato Tecnologico Industrial y de servicios No. 190, México
marioalberto.sandoval.cb190@dgeti.sems.gob.mx
https://orcid.org/0000-0002-5518-3858

Héctor Vázquez Leal*
Consejo Veracruzano de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico, México
hvazquez@uv.mx
https://orcid.org/0000-0002-7785-5272

Jesús Huerta Chua
Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico Superior de Poza Rica, México
direccion@itspozarica.edu.mx
https://orcid.org/0000-0002-2803-0645

Uriel A. Filobello Nino
Universidad Veracruzana, Facultad de Instrumentación Electrónica, México
ufilobello@uv.mx
https://orcid.org/0000-0002-3543-834x

Darwin Mayorga Cruz
Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Centro de Investigación en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, México
darwin@uaem.mx
https://orcid.org/0000-0001-9256-1611

*Autor corresponsal

Resumen

En el presente artículo se analizan algunos procedimientos adicionales para la solución de integrales que complementan la manera tradicional de enseñanza en el cálculo integral. Dado que el contenido de los libros de cálculo solo se enfoca en ciertos procedimientos, que se ven plasmados dentro del aula, se propone, en primer lugar, una ampliación del formulario básico de cálculo integral adicionando las funciones Lambert W y las funciones Leal recientemente publicadas. En segundo lugar, se propone una guía didáctica para la solución de integrales por partes. Además, en este trabajo se presentan el método de integración Hermite-Ostrogradsky y el método para integrales de funciones irracionales. Ambos métodos pueden considerarse como una extensión de la integración por fracciones parciales y de la sustitución trigonométrica por cambio de variable; así, se evita el discurso matemático escolar. Como objetivo, se exponen procedimientos facilitadores y novedosos en la didáctica del cálculo integral para estudiantes del nivel medio superior y superior.

Palabras clave: discurso matemático escolar, formulario de cálculo integral, funciones primitivas, integración por partes, técnicas de integración.

Abstract

This article presents some additional procedures in solving integrals to those generally presented in calculus books and in the classroom. In the first place, an extension of the basic integral calculus form is proposed by adding the Lambert W and trascendental Leal functions. Second, we propose a didactic solution guide for the solution of integrals by parts. In this work. The Hermite-Ostrogradsky integration methods and the German method for integrals of irrational functions are presented. Both methods can be considered as an extension of the integration by partial fractions and of the trigonometric substitution by change of variable, thus avoiding the school math speech.

Keywords: school math speech, integration formulas, primitive function, integration by parts, integration techniques.

Resumo

Este artigo analisa alguns procedimentos adicionais para a resolução de integrais que complementam a forma tradicional de ensino de cálculo integral. Dado que o conteúdo dos livros de cálculo se concentra apenas em determinados procedimentos, que são refletidos em sala de aula, propõe-se, em primeiro lugar, uma extensão da forma básica de cálculo integral adicionando as funções W de Lambert e o recém-publicado Leal funções. Em segundo lugar, é proposto um guia didático para a solução de integrais por partes. Além disso, neste trabalho são apresentados o método de integração de Hermite-Ostrogradsky e o método para integrais de funções irracionais. Ambos os métodos podem ser considerados como uma extensão da integração por frações parciais e substituição trigonométrica por mudança de variável; assim, evita-se o discurso matemático escolar. Como objetivo, são expostos procedimentos facilitadores e inovadores na didática do cálculo integral para alunos do ensino médio e superior.

Palavras-chave: discurso matemático escolar, forma de cálculo integral, funções primitivas, integração por partes, técnicas de integração.

Fecha Recepción: Noviembre 2021 **Fecha Aceptación:** Abril2022

Introducción

Si bien el discurso matemático escolar (DME), también conocido como *lenguaje matemático utilizado en las clases*, ha estado presente en la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles educativos en México, ha sido el sistema de razón el que normalmente ha impuesto argumentos, significados y procedimientos (Soto, Gómez, Silva y Cordero, 2012; Soto y Cantoral, 2014). En lo que refiere a los contenidos, estos permanecen sin cambios a pesar de las reformas realizadas en el sistema educativo. Dicho aspecto se ve reflejado en la enseñanza de los contenidos, pues estos permanecen prácticamente iguales (Cantoral, Montiel y Reyes, 2015). Lo mismo sucede con los libros de texto empleados para los cursos de matemáticas, dado que se encuentran dominados por el DME (Cantoral *et al.*, 2015).

Asimismo, el DME lo encontramos en los libros de texto en diferentes áreas de la ingeniería. Por ejemplo, en el área de sistemas de control (Ogata, 2003; D'Azzo y Houpis, 1995) las argumentaciones para determinar el lugar de las raíces permanecen prácticamente igual a pesar de que los autores publicaron una nueva edición del mismo libro y de publicaciones que demuestran otros procedimientos que facilitan la enseñanza del cálculo integral, así como su aprendizaje en los estudiantes. Aunque es necesario indagar aspectos teóricos y procedimientos tradicionales, es igualmente oportuno conocer y aplicar los nuevos conocimientos en el área.

El mismo caso ocurre con los libros de probabilidad y estadística. Por ejemplo, la manera en cómo los autores abordan la determinación de la probabilidad mediante alguna distribución de probabilidad no cambia. Porque lo realizan mediante las clásicas tablas para determinar la probabilidad, las cuales se componen de renglones y columnas que contienen las probabilidades que han sido previamente calculadas y tabuladas para su consulta. Esto sucede con la función de probabilidad de Gauss, también conocida como la *distribución normal* (Anderson, Sweeney y Williams 2008; Daniel, 1987). Cabe mencionar que, en la mayoría de los casos, las tablas se encuentran en los apéndices de los libros (Anderson *et al.*, 2008; Daniel, 1987).

En relación con los libros de cálculo, también se encuentran concebidos bajo el DME. Los contenidos que abordan son los mismos, con la diferencia de que algunos autores presentan más ejemplos demostrativos en cada uno de los temas, mientras que otros proponen más ejercicios (Ayres y Mendelson, 1994; Purcell, Varberg y Rigdon, 2007). Asimismo, algunos libros presentan una mejor organización de contenidos, emplean una mejor didáctica e incluso el uso de una o más tintas de impresión que ayudan a clarificar los contenidos (Ayres y Mendelson, 1994; Purcell *et al.*, 2007; Stewart, 2015; Stewart, Redlin y Watson, 2007).

Sin embargo, en disciplinas tanto de la ingeniería como en las matemáticas algunos autores han propuesto diferentes alternativas que pueden ayudar a superar el DME. Por ejemplo, en Sandoval *et al*. (2019a) se propuso una expresión algebraica para la solución de un circuito donde se muestra la polarización de dos diodos rectificadores. De forma tradicional, en las clases de electrónica analógica este circuito se resuelve utilizando métodos gráficos (Boylestad y Nashelsky, 2003).

De igual manera, en Sandoval, Vazquez, Filobello y Hernandez (2019b) se propusieron dos aproximaciones en términos de funciones elementales, una para la función error y otra para la función acumulativa normal, las cuales simplemente sustituyeron el valor numérico de interés; en ellas se puede obtener el valor de probabilidad o de la función error. Estos métodos de evaluación numérica pueden ayudar en las clases de estadística y de otras áreas al mostrar caminos alternativos en su determinación en comparación con las tradicionales tablas en donde se encuentra involucrado el DME (Spiegel, 2009). La diferencia es que el resultado puede quedar expresado en función de los parámetros del problema a resolver, lo que puede ser una gran ventaja cuando se requiere de algún tipo de análisis haciendo un barrido de variables.

Por último, Sandoval, Hernández, Torreblanca y Díaz (2021) presentaron una actualización a los contenidos propedéuticos del campo disciplinar del bachillerato tecnológico de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial (DGETI) en México, en donde se propone incluir la enseñanza de las funciones especiales, Lambert W y las funciones hiperbólicas con algunas aplicaciones con el fin de soslayar el DME.

Metodología

Este trabajo se llevó a cabo mediante un método de investigación documental, el cual consiste en realizar búsquedas acerca de una temática en particular con el afán de encontrar qué se ha realizado sobre el tópico de interés. Dicho punto se realizó en los libros de cálculo más conocidos de diversos autores, ya que son el medio de sustento de los profesores para impartir la clase de cálculo o afines. A su vez, se retomaron libros de distintas casas editoriales en los idiomas de inglés y español con el objetivo de comparar los contenidos publicados en México. Asimismo, se procedió a realizar la comparación de ediciones actualizadas respecto a ediciones anteriores en los libros que han tenido actualizaciones. Referente a los libros consultados, en las referencias de este artículo se ha considerado citar algunos libros de autores más utilizados en los cursos de cálculo integral a nivel bachillerato y licenciaturas de ciencias e ingeniería. Por ejemplo, en los cursos de cálculo del bachillerato tecnológico de la DGETI se emplean estos libros como referencias, entre otros (Secretaría de Educación Pública [SEP], 4 de septiembre de 2012). Dicho punto permitió la realización de la investigación documental de contenidos.

De la misma manera, se realizó una consulta en distintas bases de datos, entre ellas Google Scholar, Scielo, Dialnet, Journal Citation Reports y Scimago. Los criterios de búsqueda consistieron en: artículos científicos del área de matemática educativa, cálculo integral y funciones trascendentes. Las palabras clave que se utilizaron fueron las siguientes: *trascendental functions*, *approximative methods*, *discurso matemático escolar* y *cálculo integral*. Con base en la búsqueda de libros y artículos se elaboró una base de datos en Excel en donde se registraron aproximadamente 40 libros y más de 50 artículos relacionados con la enseñanza de las matemáticas, funciones trascendentes, su historia y métodos aproximativos en un tiempo aproximado de dos meses.

Materiales

Para la presentación de las gráficas y ejemplos resueltos presentados en este trabajo se empleó el *software* matemático Maple 2015. La computadora empleada tenía un sistema operativo Linux Ubuntu versión 18.04.5 LTS y un procesador Intel I7-7700@ 3600 GHz x 8.

Resultados

Como parte de la investigación documental llevada a cabo en este trabajo, se encontró una tendencia favorable a la pedagogía empleada para presentar los contenidos, principalmente cuando se edita una nueva edición. Los principales cambios que se realizan son el empleo de una segunda tinta (o más) de impresión, más figuras y esquemas, la incorporación de más ejemplos demostrativos y un número mayor de ejercicios propuestos al lector (Barnett, 1994; Edwards y Penney, 2007; Leithold, 2012; Purcell *et al*., 2007; Stewart, 2015). De la misma manera, algunas obras incluyen el manejo de *software* matemático como Maple (Fox, 2011), MATLAB, GNU Octave (Lie, 2019), GeoGebra (Mora, 2018) y Excel (Torres, 2016), entre otros.

El formulario de integración empleado en los libros de cálculo es el mismo, lo que confirma la influencia del DME. En algunos textos, en sus apéndices, se anexan más fórmulas de integración, que se han obtenido mediante las técnicas de integración por partes, trigonométrico, fracciones parciales procesos trigonométricos; sin embargo, la esencia del formulario sigue siendo el mismo, ya que no se incorporan nuevas fórmulas para integrar funciones: nuevamente sobresale el DME. Como producto de la investigación llevada a cabo, se propone adicionar al formulario elemental las fórmulas para las funciones trascendentes de Lambert $W(x)$ (Corless, Gonnet, Hare, Jeffrey y Knuth, 1996) y Leal (Vazquez, Sandoval y Filobello, 2020). En la tabla 1 se presentan las fórmulas de integración en discusión.

Tabla 1. Nuevas fórmulas en cálculo integral

Función trascendente	Fórmula
Lambert $W(x)$	$\int W(x)dx = \frac{x(W^2(x) - W(x) + 1)}{W(x)} + C$
$\mathrm{Lsinh}(x)$	$\int \mathrm{Lsinh}(x)dx = -\mathrm{Lsinh}(x)\cosh(\mathrm{Lsinh}(x)) + \sinh(\mathrm{Lsinh}(x)) + \mathrm{Lsinh}(x)^2 \sinh(\mathrm{Lsinh}(x)) + C$
$\mathrm{Lcosh}(x)$	$\int \mathrm{Lcosh}(x)dx = -\mathrm{Lcosh}(x)\sinh(\mathrm{Lcosh}(x)) + \cosh(\mathrm{Lcoshh}(x)) + \mathrm{Lcosh}(x)^2 \cosh(\mathrm{Lcosh}(x)) + C$
$\mathrm{Ltanh}(x)$	$\int \mathrm{Ltanh}(x)dx = -\mathrm{Ltanh(x)}^2 \tanh(\mathrm{Ltanh}(x)) - \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}(\mathrm{Ltanh}(x))^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) + C$
$\mathrm{Lcosh}(x)$	$\int \mathrm{Lcsch}(x)dx = -\mathrm{Lcsch(x)}^2 \csc(\mathrm{Lcsch}(x)) - \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^{2n-1}(2^{2n-1}-1)B_{2n}(\mathrm{Lcsch}(x))^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) + C$
$\mathrm{Lsech}(x)$	$\int \mathrm{Lsech}(x)dx = \mathrm{Lsech(x)}^2 \mathrm{sech}(\mathrm{Lsech}(x)) - \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_{2n}(\mathrm{Lsech}(x))^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!}\right) + C$
$\mathrm{Lcoth}(x)$	$\int \mathrm{Lcoth}(x)dx = -\mathrm{Lcoth(x)}^2 \coth(\mathrm{Lcoth}(x)) - \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n}(-1)^{2n}B_{2n}(\mathrm{Lcoth}(x))^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) + C$
$\mathrm{Lln}(x)$	$\int \mathrm{Lln}(x)dx = \frac{1}{2}(\mathrm{Lln}(x)+1)^2\mathrm{Lln}(\mathrm{Lln}(x)+1) + \frac{1}{4}\mathrm{Lln}(x)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Lln}(x) + (-(\mathrm{Lln}(x)+1)+1)\ln(\mathrm{Lln}(x)+1) - \frac{3}{4} + C$
$\mathrm{Ltan}(x)$	$\int \mathrm{Ltanh}(x)dx = \mathrm{Ltan(x)}^2 \tan(\mathrm{Ltan}(x)) - \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n}(2^{2n}-1)\lvert B_{2n}\rvert(\mathrm{Ltanh}(x))^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) + C$

$\mathrm{Lsinh}_2(x)$	$\int \mathrm{Lsinh}_2(x)dx = \frac{1}{2}\mathrm{Lsinh}_2(x)^2 + \mathrm{Lsinh}_2(x)\sinh\left(\mathrm{Lsinh}_2(x)\right) - \cosh\left(\mathrm{Lsinh}_2(x)\right) + C$
$\mathrm{Lcosh}_2(x)$	$\int \mathrm{Lcosh}_2(x)dx = \frac{1}{2}\mathrm{Lcosh}_2(x)^2 + \mathrm{Lcosh}_2(x)\cosh\left(\mathrm{Lcosh}_2(x)\right) - \sinh\left(\mathrm{Lcosh}_2(x)\right) + C$
Nota: *E* son los números de Euler *y B* son los números Bernoulli.	

Fuente: Vazquez *et al.* (2020)

Las funciones que se encuentran en la tabla 1 recientemente fueron publicadas, excepto Lambert *W*, que tiene su historia y que en años recientes su uso ha tomado mucha importancia en la ciencia y la ingeniería. Las funciones Leal también pertenecen al grupo de funciones trascendentes dado que poseen nuevas propiedades algebraicas que permiten realizar despejes, y de esta manera enriquecer el álgebra y la trigonometría.

Otro aspecto por mencionar es sobre los libros de cálculo, ya que algunos de los temas presentados permanecen prácticamente igual, a pesar de que existen nuevos enfoques teóricos en relación con el cálculo. Por ejemplo, el tema de aplicaciones de la integral definida incluye el cálculo de áreas, sólidos de revolución, longitud de arco, entre otros.

Las técnicas de integración que siempre aparecen en los libros de cálculo de autores conocidos se presentan en la tabla 2. En esta misma tabla se han agregado otros métodos de integración poco conocidos pero que se consideran relevantes.

Tabla 2. Las diferentes técnicas de integración

Método	Descripción de la técnica de integración en libros conocidos
Funciones elementales	Se aplican paso a paso las reglas básicas de integración como la de la suma y la regla de la potencia. Generalmente, los integrandos son polinomios con exponentes enteros o racionales (Astey, 2009; Ayres y Mendelson, 1994; Edwards y Penney, 2007; Garza, 1990, 2017; Leithold, 2012; Lizama, 2005; Aguilar, Bravo, Gallegos, Cerón y Reyes, 2010; Purcell *et al*., 2007; Stewart, 2012, 2015; Swokowski, 1989; Thomas, Finney, Weir y Giordano, 2003; Zill, 1987).
Por partes	*No* hay un esquema didáctico definido. Por inspección y por experiencia se selecciona u y dv en los integrandos (mismas referencias).
Trigonométrica	Existe una guía de integración para la combinación de seno-coseno, secante-tangente, cotangente-cosecante. Los productos seno y coseno pueden tener diferentes argumentos. Se utilizan las identidades trigonométricas (mismas referencias).
Fracciones parciales	Son cuatro casos. Factores lineales, factores lineales repetidos, factores cuadráticos distintos, factores cuadráticos. Generalmente, se utiliza la técnica de coeficientes indeterminados para encontrar los coeficientes en los numeradores (mismas referencias).
Sustitución trigonométrica	Se presenta una guía de integración cuando hay radicales o cocientes de funciones trigonométricas. El cambio de variable consiste en reemplazar las expresiones algebraicas por expresiones trigonométricas o una expresión trigonométrica por un cociente de expresiones algebraicas, según sea el caso. Se emplea el triángulo rectángulo para los cambios de variable (mismas referencias).
Hermite-Ostrogradsky	Utilizado para expresiones racionales cuando en el denominador hay factores lineales o cuadráticos con multiplicidad. La fracción del integrando se descompone en la derivada de cociente, donde el denominador es el producto de los factores disminuidos en 1 sus respectivas multiplicidades. El numerador es un polinomio en 1 orden menor al exponente del denominador. A esta fracción se le suma el número de integrales para cada uno de los

	factores. Se trata de integrales fáciles de resolver (Del Hoyo y Muto, 2001; Demidovich y Aparicio, 2001)
Alemán	Para integrales con cocientes de funciones irracionales. El proceso consiste en determinar la derivada del producto de un polinomio de grado $n-1$ en relación con el numerador del integrado por la raíz del denominador del integrado (Demidovich y Aparicio, 2001).
Euler	Para integrales con cocientes de funciones irracionales. Existen tres soluciones dependiendo de los coeficientes de la raíz del trinomio de segundo grado que se encuentra en el denominador (Del Hoyo y Muto, 2001; Demidovich y Aparicio, 2001)
Chebyshev	Se aplica a integrales binomias, que consisten en el producto de x elevado a una potencia con un binomio elevado a una potencia. Hay tres casos que permiten la solución en términos de funciones elementales. En todos ellos se realiza una operación entre los exponentes y el resultado debe ser un número entero y dependiendo del caso será el tipo de cambio de variable empleado (Demidovich y Aparicio, 2001).

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 2 se puede observar que las técnicas de integración que se utilizan en los libros clásicos de cálculo son: integración fundamental, integración por sustitución de cambio de variables, integración por partes, integración trigonométrica (circulares e hiperbólicas), integración por fracciones parciales e integración por otras técnicas de sustitución trigonométrica (métodos que utilizan el triángulo rectángulo); las demás técnicas de integración no versan siquiera su existencia. No obstante, parte del DME en el salón de clase es recurrir a los libros tradicionales. Del Hoyo y Muto (2001) presentan los métodos de Hermite-Ostrogradsky y Euler; por otro lado, Demidovich y Aparicio (2001) siguen el DME y el aspecto de dejar al estudiante probar sus habilidades intuitivas al utilizar las fórmulas de los métodos de Chebyshev y alemán.

En ese sentido, los libros proporcionan una guía para resolver problemas por medio de las técnicas usuales de integración, las cuales se manejan en los cursos de cálculo integral. En el caso de la integración por partes, generalmente se presenta una estrategia intuitiva de solución por inspección centrándose en la elección “arbitraria” de u y dv, de acuerdo con la fórmula de integración por partes (1).

Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo
ISSN 2007 - 7467

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (1)$$

Por lo tanto, considerando los esquemas de integración proponemos la siguiente *guía didáctica de solución para integrar por partes* soslayando el DME impuesto en esta técnica de integración tanto en los libros como dentro de salón de clase (ver figura 1).

Figura 1. Guía didáctica de solución para integrar por partes

Caso 1. La integral del producto de una función trascendente por una función algebraica

$$\int x^n f(x)dx$$

donde $u = x^n, dv = f(x)dx$. En este caso $f(x)$ puede ser una función trascendente excepto logaritmo y tangente.

Caso 2. La integral del producto de una función trascendente por una función algebraica

$$\int f(x)^{-1} x^n dx$$

donde $u = f(x)^{-1}, dv = x^n$. En este caso $f(x)^{-1}$ puede ser una función trascendente de arco, logaritmo, excepto la función exponencial.

Fuente: Elaboración propia

Véase que la guía de integración se divide en dos casos, los cuales consisten, en primer lugar, en identificar las funciones trascendentes y sus funciones inversas. De esta manera, en el caso 1 si $f(x) = \sin x$, entonces se selecciona como dv a integrar. Es importante observar que el caso de la función tangente ha quedado excluido ya que una integral por partes con esta función no es posible integrarla y obtener un resultado en términos de funciones elementales. Para el caso 2 tenemos que $u = f(x)^{-1}$ excluye a la función exponencial y esto es porque la función logaritmo cumple el requisito y es la función inversa de la función exponencial.

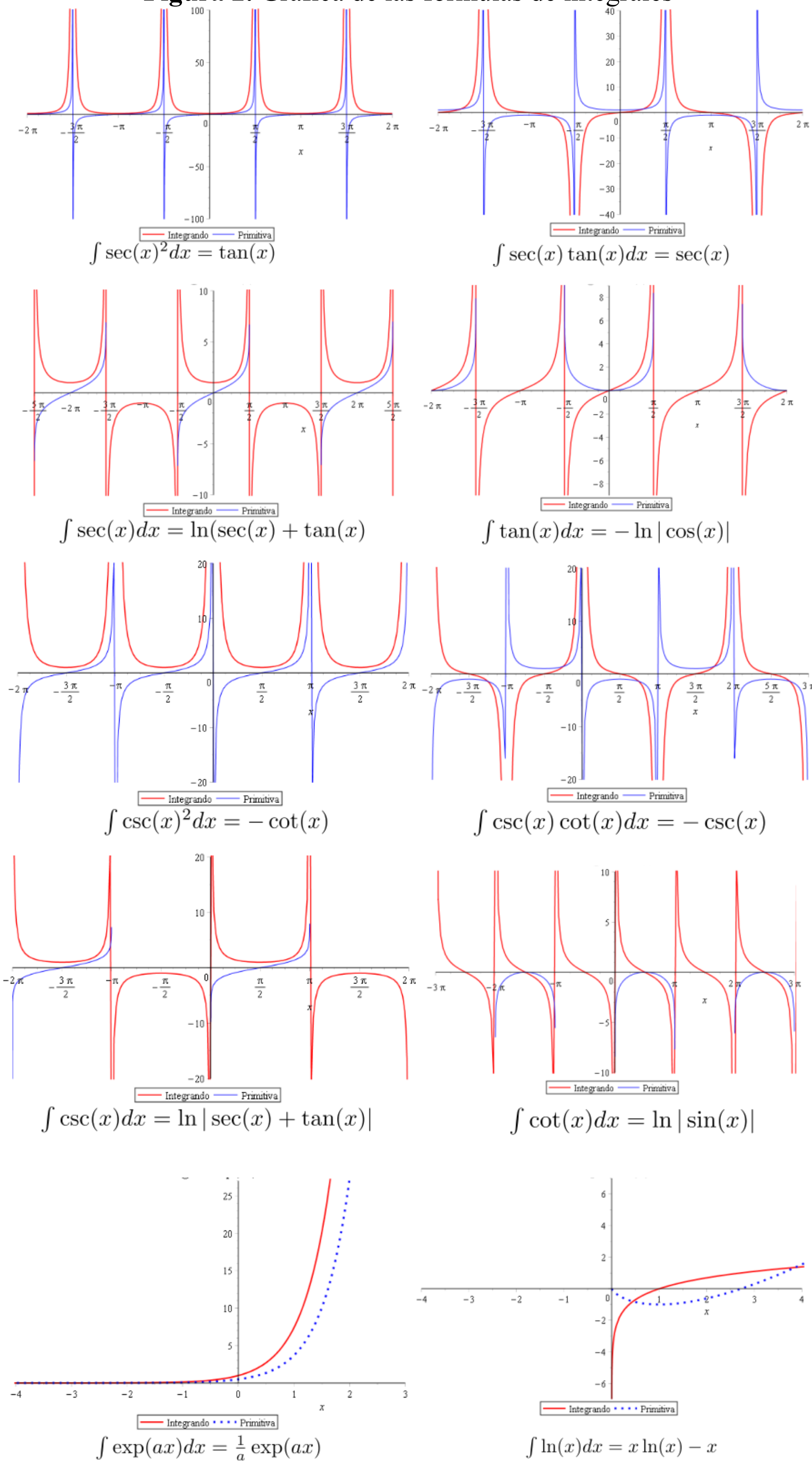
Discusión

El formulario de cálculo integral incluye las fórmulas para integrar funciones elementales, sin embargo, no se presenta alguna gráfica de las funciones que se obtienen al integrarse. Se asume que el estudiante tiene bases sólidas del manejo de funciones, suposición hecha a partir del DME. La figura 2 muestra las gráficas de algunas de las funciones obtenidas con fórmulas de integración más utilizadas en los cursos de cálculo integral. Se puede observarse la periodicidad de las funciones primitivas que se han obtenido al integrar las funciones trascendentes. Es importante observar que la integral de una función periódica nos devuelve otra función periódica. El DME que impera en los libros y en las clases de cálculo integral hace notorio este detalle y supone que todo estudiante posee conocimientos necesarios de precálculo. En este trabajo de investigación se propone a los autores de libros y maestros analizar las funciones que se obtienen en el formulario y, de manera adicional, graficar la función primitiva que se obtiene en los ejercicios propuestos para realizar.

Además se muestra el comportamiento de las integrales para la función exponencial natural y logaritmo natural. Véase, en el caso de la función exponencial, el efecto que tiene la constante que aparece junto a la variable de integración: genera un escalamiento en la función. En el caso de la integral de la función logaritmo, la función resultante es diferente ya que se generan términos algebraicos que generan un cambio en la función. Véase, igualmente, que la discontinuidad en el origen ha desaparecido, por lo que la función primitiva es ahora analítica en el origen.

Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo
ISSN 2007 - 7467

Figura 2. Gráfica de las fórmulas de integrales



Fuente: Elaboración propia

Cuando se estudia el tema de integración por partes es común que las dudas por parte de los alumnos aparezcan al momento de escoger u y dv en un integrando. Los libros de texto solamente se limitan a explicar el problema y hacer la respectiva selección del integrando. Por ejemplo, Ayres y Mendelson (1994), Edwards y Penney (2007), Garza (2017), Leithold (2012), Lizama (2005) Purcell *et al*. (2007), Stewart (2015), Swokowski (1989) y Zill (1987) presentan ejemplos demostrativos en la solución de problemas integrales por partes haciendo la selección de u y dv por inspección. Aunque pedagógicamente no explican a detalle el porqué, la experiencia que se obtiene por intuición o por la práctica al resolver una pila de problemas nos muestra que el truco está en buscar cancelaciones algebraicas, lo que es ocasionado generalmente por la presencia de cocientes en el integrando, con lo que se obtiene una expresión simplificada que genera una integral más simple o directa para resolver.

La práctica nos dice que la selección de u y dv tiene una jerarquía en su selección. Para seleccionar u de una manera acertada primero deben elegirse las funciones inversas de las trigonométricas, después las logarítmicas, las algebraicas, las trigonométricas y por último las exponenciales. A esta regla los maestros en las aulas suelen llamarla *la regla de los Alpes*, porque la prioridad de selección es: funciones de *a*rco, *l*ogaritmos, expresiones algebraicas elevadas a una *p*otencia, *e*xponenciales y, por último, las funciones trigonométricas *s*eno y coseno. El saber popular también ha incurrido en apodar a la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado como la *chicharronera*.

Al respecto, Mateus (2016) llevó a cabo un análisis didáctico del método de integración por partes en una clase de licenciatura. Aquí se reportan algunos errores que ocurren en esta técnica de integración al no ser clara la selección de u y dv. Asimismo, el mismo autor enfatiza que de acuerdo al enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción matemática se tiene el conflicto semiótico (epistémico) ya que el profesor soslaya la jerarquía al escoger a de u y dv. Otro aspecto que reporta el autor es el conflicto semiótico cognitivo en donde el docente le presenta a los alumnos la integral del cociente de una función seno y una función exponencial. Ante la imposibilidad de algunos de los alumnos en resolverla, el profesor interviene indicando que si se sube la exponencial ya se puede integrar.

Los conflictos cognitivos que experimentan los estudiantes de licenciatura en la instrucción del tema de integración por partes que reportó Mateus (2016) también ocurren en el nivel medio superior en la asignatura de Cálculo Integral. Visto a la luz del DME, el hecho de seleccionar u y dv por inspección, o en su caso dictarles a los alumnos como receta de cocina que la selección de u y dv tiene una jerarquía sin dar alguna explicación del porqué, es perpetuar la violencia simbólica, ya que se están imponiendo argumentos y procedimientos (Soto y Cantoral, 2014). Como resultado, el alumno continúa sin tener claro cómo escoger los elementos del integrando.

Teniendo en cuenta la jerarquía al seleccionar u y dv, obtenemos *la guía de solución didáctica de solución* para integrar por partes, la cual se propone en este trabajo. De esta manera, es mucho más fácil identificar los factores que deben derivarse e integrarse al utilizar (1). Es responsabilidad del docente clarificar, de acuerdo con sus estrategias de enseñanza, la jerarquía de selección de u y dv y mostrar al alumno que el propósito de escoger u de manera certera es el de generar simplificaciones por medio de la división, o en su caso anular factores algebraicos por la disminución de los exponentes a los que se encuentren elevados.

Por otra parte, en los libros de texto de cálculo integral, y sobre todo a nivel bachillerato, cuando se aborda la integración por fracciones parciales el DME limita al estudiante a creer que la metodología basada en los cuatro casos de descomposición y el método de los coeficientes indeterminados para obtener las constantes de los numeradores de esta descomposición son la única manera de hacerlo; sin embargo, esto no es así. Afortunadamente, algunos autores desafían el DME empleando otras técnicas de solución para obtener las constantes del método de descomposición mediante residuos. Ogata (2003) y D'Azzo y Houpis (1995) utilizan este método para determinar la transformada inversa de Laplace, que da solución a ecuaciones diferenciales que son el modelo matemático de distintos sistemas, como es el caso del péndulo invertido y del sistema masa-resorte-amortiguador, etc. Gómez (2017) presenta la metodología de manera didáctica para obtener la expansión por fracciones parciales mediante residuos con ejemplos ilustrativos, sin embargo, se siguen presentando expansiones de fracciones empleando números reales en los denominadores, tal como lo sugiere el DME. En el trabajo de Ambardar (1999) se estudia el procesamiento analógico y digital de señales, el diseño de filtros digitales y algunas de sus aplicaciones. En el procesamiento digital de señales se utiliza una variable compleja para realizar los distintos análisis. En este libro el autor realiza una expansión de fracciones parciales utilizando números complejos en los denominadores para calcular la transformada z inversa. Sin embargo, los libros de cálculo no dicen nada al respecto. En el caso de los libros de precálculo, se abordan los números complejos, álgebra y trigonometría, entre otros temas, y a pesar de exponer los números complejos tampoco se emplean los números complejos en la expansión de las fracciones parciales (Barnett, 1994; Barnett, Ziegler y Byleen, 2012). Asimismo, también es posible utilizar los números complejos en la expansión de fracciones parciales para obtener la transformada inversa de Laplace en los cursos de ecuaciones diferenciales (D'Azzo y Houpis, 1995; Ogata, 2003).

A continuación, se presentan los procedimientos alternos no considerados en los cursos típicos del cálculo integral y que pueden implementarse tanto en los libros de cálculo como en los cursos escolares. En los primeros cinco se presentan ejemplos de integración por partes utilizando la guía didáctica de solución que se propone en este artículo. El número cinco presenta un ejemplo de integración por fracciones parciales que emplea números complejos en su solución.

Procedimientos alternativos de solución

Ejemplo 1

Para el caso 1, sea la integral

$$\int x \cos x \, dx. \tag{2}$$

El integrado consiste de un producto de una función algebraica lineal y una función trascendente de tal manera que tenemos $\int x^n f(x) dx$. Por lo tanto, al utilizar el lado izquierdo de (1) hacemos $u = x$, con $n = 1$, $dv = \cos x \, dx$. En consecuencia, obtenemos lo siguiente:

$$du = dx,$$
$$v = \sin x. \tag{3}$$

Al sustituir (3) en el lado derecho de la fórmula dada por (1), la función primitiva que estamos buscando es

$$\int x \cos x \, dx. = \cos x + x \sin x + C. \tag{4}$$

Ejemplo 2

Para el caso 2, sea la integral:

$$\int \ln x \, dx. \tag{5}$$

En este ejemplo se tiene un integrando que contiene una función del tipo $f\,(x)^{-1}$ dado por la función $\ln x$ (recuérdese que la función logaritmo es la inversa de la función exponencial). Por lo tanto, la integral dada por (5) es del caso 2 dado por $\int f(x)^{-1} x^n dx$.

Considerando (1) tenemos $u = f(x)^{-1} = \ln x\,, dv = dx$ con $n = 0$. Consecuentemente al emplear la fórmula de integración por partes obtenemos

$$du = \frac{1}{x}dx,$$

$$v = x. \qquad (6)$$

Al utilizar la fórmula de integración por partes dada por (1), obtenemos lo siguiente:

$$\int \ln\ x\ dx = xln\, x - x + C. \qquad (7)$$

Ejemplo 3

Es posible resolver integrales que poseen en su integrado el producto de dos factores algebraicos. Sea la integral:

$$\int x\sqrt{1+x}dx. \qquad (8)$$

Esta integral corresponde al caso tenemos $\int x^n f(x)dx$. Haciendo $u = x$ n= 1, $dv = \sqrt{1+x}$ tenemos:

$$du = 1,$$

$$v = \tfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}. \qquad (9)$$

Y al utilizar (1) encontramos la solución de la integral (8):

$$\int x\sqrt{1+x}dx = \tfrac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{4}{15}(1+x)^{\frac{3}{2}} + C. \qquad (10)$$

Ejemplo 4

Resolver la siguiente integral:

$$\int xW(x)dx, \qquad (11)$$

Allí, $W(x)$ es la función Lambert *W*. Siguiendo a Corless *et al*. (1996) y Vazquez, Sandoval, Garcia, Herrera y Filobello (2019), Lambert *W* se define de la siguiente forma:

$$x = W(x)\exp W(w). \qquad (12)$$

Para resolver esta integral por partes se debe recurrir al cambio de variable.

$$t = W. \qquad (13)$$

Nosotros vamos a integrar (13) utilizando la primera fórmula del formulario de la tabla y utilizando el caso 1 para la integración por partes y no incurrir en el DME. En este caso:

$$u = x, n = 1, dv = dx,$$
$$du = dx, v = \frac{x^2(W^2 - W + 1)}{W}. \tag{14}$$

Al utilizar (1) tenemos:

$$\int xW(x)dx = x\frac{x(W^2 - W + 1)}{W} - \int \frac{x(W^2 - W + 1)}{W}dx\,. \tag{15}$$

Luego de sustituir (13) en (15) y completar el diferencial con $dx = t \exp t + \exp t$, se obtiene:

$$\int xW(x)dx = x\frac{x(W^2 - W + 1)}{W} - \int \big(\exp 2t\ (1 + t)\big)\, t^2 - \big(\exp 2t\ (1 + t)\big)t + \big(\exp 2t\ (1 + t)\big)\,)dx. \tag{16}$$

De la integral resultante, se debe integrar nuevamente por partes tomando en cuenta el caso 1. Una vez que se procede, se obtiene:

$$\int xW(x)dx = x\frac{x(W^2 - W + 1)}{W} - \left[\frac{\exp\ 2t}{8}(4t^3 - 6t^2 + 6t + 1)\right]. \tag{17}$$

Para recuperar W hacemos $\exp 2t = \frac{x^2}{W^2}, t = w$. Luego de sustituir en (17) y simplificando obtenemos:

$$\int xW(x)dx = \frac{x^2(4W^3 - 2W^2 + 2W - 1)}{8W^2}. \tag{18}$$

Ejemplo 5

Resuelva la integral por fracciones parciales:

$$\int \frac{8dx}{x(x^2 + 4)}. \tag{19}$$

La integral que resolveremos genera dos fracciones en su descomposición. De acuerdo con el DME que encontramos en los libros de texto, la expansión correspondería a utilizar el caso 1 factores lineales distintos y al caso 3 factores cuadráticos distintos. Por lo tanto, la expansión que se realiza de manera habitual sería:

$$\frac{8}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}, \tag{20}$$

En este caso, las constantes A, B y C se pueden determinar utilizando la metodología de los coeficientes indeterminados o por el método de los residuos. Haremos la expansión de fracciones parciales considerando únicamente el caso 1, es decir, factores lineales distintos. De esta manera, se obtiene:

$$\frac{8}{x(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2i}+\frac{C}{x+2i}. \tag{21}$$

Utilizando cualquier método de solución para hallar las constantes A, B, C tenemos entonces

$$\frac{8}{x(x^2+4)}=\frac{2}{x}-\frac{1}{x-2i}-\frac{1}{x+2i}. \tag{22}$$

La integral que resolveremos queda en función de tres fracciones simples fáciles de resolver:

$$\int\frac{8dx}{x(x^2+4)}=\int\frac{2dx}{x}-\int\frac{dx}{x-2i}+\int\frac{dx}{x+2i}. \tag{23}$$

De (22) y (23) observamos claramente que en la descomposición han quedado números complejos y que al momento de realizar las integrales quedan términos imaginarios dentro de los argumentos de los logaritmos generados en la segunda y tercera integral. Aplicando las propiedades de los logaritmos y simplificando, se obtiene:

$$\int\frac{8dx}{x(x^2+4)}=2\ln x-\ln(x^2+4)+C. \tag{24}$$

La ventaja de utilizar números complejos es que en este ejemplo se evitó hacer uso de la integración por sustitución por cambio de variable, ya que las integrales dos y tres que se resolvieron fueron mucho más sencillas debido a que fue integración directa. En el resultado final es posible observar que quedaron términos reales, tal como hubiera ocurrido al seguir los procedimientos tradicionales en la expansión de las fracciones parciales, procedimiento influenciado por el DME.

Otras técnicas de integración para funciones racionales e irracionales

A continuación mostraremos los métodos Hermite-Ostrogradsky y alemán presentados en Del Hoyo y Muto (2001) y Demidovich y Aparicio (2001).

Método Hermite-Ostrogradsky

Este método podemos considerarlo una extensión de la integración por fracciones parciales con la ventaja de que al final del procedimiento se resuelve una integral sencilla por cada uno de los factores distintos, los cuales pueden ser lineales o cuadráticos, sin embargo, puede presentarse el inconveniente de resolver derivadas tediosas. El método se presenta en la figura 3.

Figura 3. Método Hermite-Ostrogradsky

$$\frac{R(x)}{F(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi(x)}{\phi(x)}\right) + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{Mx+N}{(x-\gamma)^2+\beta} + \cdots. \tag{25}$$

El denominador $\phi(x)$ consiste en la multiplicación de factores con una unidad menos en la multiplicidad. El numerador es un polinomio general de un grado inferior a $\phi(x)$. Una vez realizada la descomposición se tiene

$$\int \frac{R(x)}{F(x)}dx = \int \frac{d}{dx}\left(\frac{\psi(x)}{\phi(x)}\right)dx + \int \frac{Adx}{x-a} + \int \frac{Bdx}{x-b} + \cdots. \tag{26}$$

Por último se determinan los coeficientes de los numeradores.

$$\int \frac{R(x)}{F(x)}dx = \frac{\psi(x)}{\phi(x)} + A\ln(x-a) + B\ln(x-b) + \cdots. \tag{27}$$

Fuente: Elaboración propia

Ejemplo 6

Determinar la integral utilizando el método Hermite-Ostrogradsky:

$$\int \frac{x^2-4}{x^3(x^2+1)^2}dx. \tag{28}$$

En este caso, la expansión para esta integral quedará de la siguiente forma:

$$\frac{x^2-4}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^2(x^2+1)}\right] + \frac{E}{x} + \frac{Fx+G}{x^2+1}. \tag{29}$$

Derivando y simplificando la derivada, se obtiene:

$$\frac{x^2-4}{x^3(x^2+1)^2} = -\frac{Ax^5+2Bx^4-Ax^3+3Cx^3+4Dx^2+Cx+2D}{x^3(x^2+1)^2} + \frac{E}{x} + \frac{Fx+G}{x^2+1}. \tag{30}$$

Para determinar las constantes en (30) se procede a formar el sistema de ecuaciones lineales igualando coeficientes para cada una de las potencias.

$$\begin{aligned}
x^0&: \quad -2D = -4,\\
x^1&: \quad -C = 0,\\
x^2&: \quad -4D + E = 1,\\
x^3&: \quad A - 3C + G = 0,\\
x^4&: \quad -2B + 2E + F = 0,\\
x^5&: \quad -A + G = 0,\\
x^6&: \quad E + F = 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo
ISSN 2007 - 7467

Una vez que se resuelve (31) con cualquier método de solución algebraico, obtenemos $A = 0, B = \frac{9}{2}, C = 0, D = 2, E = 9, F = -9, G = 0$. Así, sustituimos en nuestra integral:

$$\int \frac{x^2-4}{x^3(x^2+1)^2} dx = \frac{\frac{9}{2}x^2+2}{x^2(x^2+1)} + \int \frac{9}{x} dx + \int \frac{-9x}{x^2+1} dx . \tag{32}$$

Por último, al integrar mediante (27) llegamos a:

$$\int \frac{x^2-4}{x^3(x^2+1)^2} dx = \frac{\frac{9}{2}x^2+2}{x^2(x^2+1)} + 9 \ln x - \frac{9}{2} \ln(x^2+1) . \tag{33}$$

Método (alemán) para integrales de funciones irracionales

Este método puede considerarse como una extensión del método de sustitución trigonométrica de cambio de variable con la ventaja que los procedimientos son más simples con una integral resultante fácil de resolver. Esta técnica de integración se presenta en la figura 4 (Demidovich y Aparicio, 2001).

Figura 4. Método (alemán) para integrales de funciones irracionales

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{K dx}{\sqrt{ax^2+bx+c,}} \tag{34}$$

Derivando

$$\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{d}{dx}\left(Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right) + \frac{K dx}{\sqrt{ax^2+bx+c,}} \tag{35}$$

Fuente: Elaboración propia

$P_n(x)$ es un polinomio de grado n, $Q_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$ con coeficientes que deben determinarse y K es una constante. Adviértase que la integral resultante en (23) se completar utilizando las fórmulas que aparecen en los formularios de cálculo integral.

Ejemplo 7

Resolver la integral:

$$\int \frac{(6x^3+6x)\, dx}{\sqrt{x^2+9}}, \tag{36}$$

Comenzamos por sustituir en (35):

$$\frac{(6x^3+6x)}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{d}{dx}\left[(Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+9}\right] + \frac{K}{\sqrt{x^2+9}}. \quad (37)$$

Haciendo la derivada y simplificando:

$$\frac{(6x^3+6x)}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{3Ax^3+2Bx^2+18Ax+Cx+9B+K}{\sqrt{x^2+9}}. \quad (38)$$

Para determinar las constantes en (38), se procede a formar el sistema de ecuaciones lineales igualando coeficientes para cada una de las potencias.

$$\begin{aligned} x^0&: 9B + K = 0, \\ x^1&: 18A + C = 6, \\ x^2&: \quad 2B = 0, \\ x^3&: \quad 3A = 6. \end{aligned} \quad (39)$$

Resolviendo (39) con cualquier método de solución algebraico obtenemos $A = 2, B = 0, C = -30, K = 0$. Sustituyendo en (23) tenemos

$$\int \frac{(6x^3+6x)\,dx}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{2x^2-30}{\sqrt{x^2+9}}. \quad (40)$$

De (40) podemos ver que la ventaja de utilizar este método de integración porque el procedimiento fue rápido y completamente algebraico. En este ejemplo la constante de la integral fue igual a cero y con ello no fue necesario realizarla. Comparando esta técnica de integración contra el método de sustitución trigonométrica de cambio de variable, habría sido necesario hacer uso de identidades trigonométricas, el empleo del triángulo rectángulo, tanto para obtener la nueva variable en el dominio trigonométrico como para recuperar la variable en x con la posibilidad de realizar una espectacular simplificación algebraica, incluyendo el proceso de integración que puede requerir el empleo de una segunda técnica de integración como es la integración por partes.

Conclusiones

En este artículo se propuso ampliar el formulario básico de cálculo integral con la función Lambert W y otras funciones trascendentes que poseen nuevas propiedades algebraicas. Además, se propuso una estrategia de solución didáctica para resolver integrales por partes. Se presentaron algunas de las gráficas de las funciones que se obtienen al integrar funciones del formulario básico de integración. En este trabajo de investigación se resolvieron cuatro problemas empleando la metodología propuesta para la integración por partes.

En la integración por fracciones parciales se mostró con un ejemplo que es posible simplificar procesos algebraicos mediante el empleo de números complejos. De la misma manera, se han presentado dos ejemplos de integración, que fueron resueltos empleando las técnicas de integraciones poco difundidas, Hermite-Ostrogradsky y el método para integrales de funciones irracionales. Estos métodos de integración mostraron la ventaja de ser algebraicos y evitar integrales complicadas.

De los ejercicios resueltos se concluye que es posible mostrarle al alumno diferentes alternativas para resolver integrales mediante técnicas adicionales, con algunas ventajas procedimentales respecto a las que comúnmente se enseñan en los cursos de cálculo integral.

El DME ha limitado el pensamiento del alumno al encajonarlo únicamente en las técnicas de integración convencionales que se publican en los libros más conocidos de cálculo que el mismo DME impone en los cursos. Posiblemente, porque estos libros se han convertido en una tradición en las instituciones públicas y privadas, bachilleratos o universidades para sus cursos de cálculo integral. Consideramos que estos procedimientos alternativos presentados en este trabajo para cálculo integral puedan ser incorporados a los libros de texto en futuras ediciones y en su enseñanza.

Futuras líneas de investigación

Es necesario investigar aplicaciones educativas para las nuevas integrales de la tabla 1, excepto Lambert W, que actualmente tiene amplias aplicaciones en las distintas ramas de la tecnología y la ciencia. Deben formarse grupos piloto para llevar a la práctica lo que se propone en este trabajo en los niveles medio superior y superior. Posteriormente, es fundamental diseñar y aplicar instrumentos de evaluación que permitan verificar los aprendizajes del alumno referente a la guía didáctica de solución para integrar por partes.

Limitaciones

Debido a la gran cantidad de temas que se abordan en un curso semestral de cálculo integral, el tiempo sería una limitante para implementar todas las técnicas de integración, ya que son completamente procedimentales. Además, para implementar las fórmulas de integración de las funciones Lambert *W* y Leal, se requiere que el profesorado actualice su acervo de conocimientos. En el caso de los alumnos de bachillerato y algunos de licenciatura, no conocen los números de Euler y Bernoulli que se manejan en las fórmulas de la familia de funciones Leal, por lo que es necesario que los docentes retomen estos conceptos.

Referencias

Aguilar, A., Bravo, F. V., Gallegos, H. A., Cerón, M. y Reyes, R. (2010). *Cálculo diferencial e integral*. México: Prentice Hall.

Ambardar, A. (1999). *Analog and Digital Signal Processing*. Brooks Cole Publishing Company.

Anderson, D. R., Sweeney, D. J. y Williams, T. A. (2008). *Estadística para administración y economía* (10.ª ed.). Ciudad de México, México: Cengage Learning.

Astey, L. (2009). *Cálculo diferencial (Conalep)*. México: Limusa.

Ayres, F. y Mendelson, E. (1994). *Cálculo diferencial e integral* (3.ª ed.). McGraw-Hill.

Barnett, R. (1994). *Álgebra con geometría analítica y trigonometría*. México: Limusa-Noriega.

Barnett, R. A., Ziegler, M. R. y Byleen, K. (2012). *Precálculo: funciones y gráficas*. McGraw-Hill.

Boylestad, R. L. y Nashelsky, L. (2003). *Electrónica: teoría de circuitos y dispositivos electrónicos* (8.ª ed.). Naucalpan de Juárez, México: Prentice Hall.

Cantoral, R. Montiel, G. y Reyes, D. (2015). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la teoría socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (8), 9-28.

Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E., Jeffrey, D. J. and Knuth, D. E. (1996). On the Lambert*W* function. *Advances in Computational Mathematics*, *5*(1), 329-359.

Daniel, W. W. (1987). *Bioestadística. Base para el análisis de las ciencias de la salud* (3.ª ed.). Ciudad de México, México: Limusa.

D'Azzo, J. J. and Houpis, C. H. (1995). *Linear Control System Analysis and Design: Conventional and Modern* (4th ed.). McGraw-Hill.

Del Hoyo, M. B. y Muto, V. (2001). *Fundamentos matemáticos de la ingeniería*. España: Editorial de la Universidad del País Vasco.

Demidovich, B. P. y Aparicio, E. (2001). *5000 problemas de análisis matemático*. Madrid, España: Thomson.

Edwards, C. H. y Penney, D. E. (2007). *Cálculo.* México: Pearson Educación.

Fox, W. P. (2011). *Mathematica Modeling with Maple*. Nelson Education.

Garza, B. (1990). *Cálculo diferencial: matemáticas IV*. *Colección DGETI*. México: Dirección General de Educación Tecnológica Industrial.

Garza, B. (2017). *Cálculo integral*. México: Prentice Hall.

Gómez, J. L. (2017). Técnicas alternativas para el cálculo de fracciones parciales. *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, *9*, 24-41.

Leithold, L. (2012). *El cálculo* (7.ª ed.). Ciudad de México, México: Oxford University Press-Harla México.

Lie, K.-A. (2019). *An Introduction to Reservoir Simulation Using MATLAB/GNU Octave*. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.

Lizama, F. M. (2005). *Cálculo integral*. *Colección DGETI*. México: Fondo de Cultura Económica.

Mateus, E. (2016). Análisis didáctico a un proceso de instrucción del método de integración por partes. *Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 559-585.

Mora, J. A. (2018). Investigaciones en clase de matemáticas con GeoGebra Ponencia presentada en las XIII Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunittat Valenciana. San Vicente del Raspeig, 19 y 20 de octubre de 2018.

Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna* (4.ª ed.). Madrid, España: Prentice Hall.

Purcell, E. J., Varberg, D. E. y Rigdon, S. E. (2007). *Cálculo* (9.ª ed.). Naucalpan de Juárez, México: Pearson Educación.

Sandoval, M. A., Alvarez, O., Contreras, A. D., Pretelin, J. E., Palma, B. E., Jimenez, V. M., Filobello, U., Pereyra, D., Hernandez, S. F., Sampieri, C. E., González, F. J., Castaneda, R., Hernandez, S., Matias, J., Cuellar, L., Hoyos, C., Cervantes, J., Varela, L. J., Vázquez, J. L., Gil, L., Fernández, J. L., Bagatella, N. and Vazquez, H. (2019a). Exploring the Classic Perturbation Method for Obtaining Single and Multiple

Solutions of Nonlinear Algebraic Problems with Application to Microelectronic Circuits. *International Journal of Engineering Research & Technology*, *8*(9), 636-645.

Sandoval, M. A., Vazquez, H., Filobello, U. and Hernandez, L. (2019b). New handy and accurate approximation for the Gaussian integrals with applications to science and engineering. *Open Mathematics*, *17*(1), 1774-1793.

Sandoval, M. A., Hernández, S., Torreblanca, S. E. y Díaz, G. U. (2021). Actualización de contenidos en el campo disciplinar de matemáticas del componente propedéutico del bachillerato tecnológico: el caso de las funciones especiales. *RIDE Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, *12*(23). Recuperado de https://doi.org/10.23913/ride.v12i23.1044.

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (4 de septiembre de 2012). Acuerdo número 653 por el que se establece el Plan de Estudios del bachillerato tecnológico. *Diario Oficial de la Federación*. Recuperado de http://dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5266314&fecha=04/09/2012#:~:text=%2D%20El%20Bachillerato%20Tecnol%C3%B3gico%20se%20cursa,los%20estudios%20de%20tipo%20superior.

Soto, D., Gómez, K., Silva, H. y Cordero, F. (2012). Exclusión, cotidiano e identidad: una problemática fundamental del aprendizaje de la matemática. En Flores, R. (ed.ª), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1041-1048). Ciudad de México, México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1525-1544.

Spiegel, M. R. y Stephens, L. J. (2009). *Estadística* (4.ª ed.). Ciudad de México, México: McGraw-Hill.

Stewart, J. (2012). *Single Variable Calculus: Early Transcendentals* (7th ed.). United States: Cengage Learning.

Stewart, J. (2015). *Calculus* (8th ed.). Boston, United States: Cengage Learning.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2007). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (5.ª ed.). Ciudad de México, México: Cengage Learning.

Swokowski, E. W. (1989). *Cálculo con geometría analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Thomas, G. B., Finney, R. L., Weir, M. D. and Giordano, F. R. (2003). *Thomas' Calculus*. Reading, United States: Addison-Wesley.

Torres, M. (2016). *Aplicaciones con VBA con Excel*. Lima, Perú: Alfaomega, Macro.

Vazquez, H., Sandoval, M. A., Garcia, J. L., Herrera, A. L. and Filobello, U. A. (2019). PSEM Approximations for Both Branches of Lambert Function with Applications. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, *2019*.

Vazquez, H., Sandoval, M. A., and Filobello, U. (2020). The novel family of transcendental Leal-functions with applications to science and engineering. *Heliyon*, *6*(11).

Zill, D. G (1987). *Cálculo con geometría analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rol de Contribución	Autor (es)
Conceptualización	Mario A. Sandoval Hernandez
Metodología	Mario A. Sandoval Hernandez
Software	Darwin Mayorga Cruz
Validación	Darwin Mayorga Cruz
Análisis Formal	Mario. Sandoval Hernandez
Investigación	Mario. Sandoval Hernandez
Recursos	Jesus Huerta Chua
Curación de datos	Uriel A. Filobello Nino
Escritura - Preparación del borrador original	Mario A. Sandoval Hernandez
Escritura - Revisión y edición	Mario A. Sandoval Hernandez
Visualización	Mario A. Sandoval Hernandez
Supervisión	Hector Vazquez Leal
Administración de Proyectos	Mario A. Sandoval Hernandez
Adquisición de fondos	Jesus Huerta Chua