Evaluación de una estrategia didáctica para la apropiación del concepto "derivada de una función"

Evaluation of a teaching strategy for the appropriation of the concept: "derivative of a function"

Avaliação de uma estratégia de ensino para a apropriação do termo "derivada de uma função"

Felipe Santoyo Telles
Universidad de Guadalajara, México
felipes@cusur.udg.mx

Miguel Ángel Rangel Romero
Universidad de Guadalajara, México
marangel@cusur.udg.mx

Eliseo Santoyo Teyes
Universidad de Guadalajara, México
esantoyo25@hotmail.com

Karla Liliana Puga Nathal
Universidad de Guadalajara, México
karlalpn4@hotmail.com

Resumen

La enseñanza tradicional del cálculo diferencial presenta grandes dificultades respecto a la apropiación significativa del concepto *derivada de una función*. Dado lo anterior, se construyó una propuesta didáctica considerando al conocimiento como una construcción personal a partir de los esquemas de cada sujeto y una negociación intersubjetiva de significados; asimismo, se considera al profesor como un promotor o mediador de la interacción entre los sujetos cognoscentes y el objeto cognoscible. Sobresalen los procesos de organización y adaptación con una estructura que atiende los principios del proceso de asimilación–acomodación de Piaget, y que provocan el cambio de estructura, desarrollo y aprendizaje. Los contenidos de la propuesta se presentan contextualizados y organizados bajo una secuencia lógica en un cuadernillo de trabajo. Finalmente, la propuesta se experimentó y valoró mediante la prueba *t student* con resultados positivos.

Palabras clave: estrategias didácticas**,** aprendizaje significativo, derivada de una función.

Abstract

The traditional teaching of the Differential Calculus presents great difficulties concerning the significant appropriation of the concept *derivative of a function*. Given it above, is built a proposed didactic whereas to the knowledge as a construction staff with base in the schemes of each subject and an intersubjective negotiation of meanings; also, the Professor is considered as a promoter or mediator of the interaction between the cognoscenti subjects and the knowable object. Stand out those processes of organization and adaptation with a structure serving the principles of the process of assimilation-accommodation of Piaget, and causing the change of structure, development and learning. The contents of the proposal are contextualized and organized under a logical sequence in a work booklet. Finally, the proposal is experienced and valued by the test *t student* with positive results.

Key words: educational strategies, meaningful learning, derivative of a function.

Resumo

O ensino tradicional de cálculo diferencial apresenta grandes dificuldades quanto à apropriação significativa do derivado conceito de uma função. Face ao exposto, a proposta didática considerando o conhecimento como uma construção pessoal dos esquemas de cada sujeito e uma inter significados de negociação construídos; Além disso, é considerado o professor como um promotor ou mediador da interação entre os sujeitos cognitivos e objeto cognoscível. Projetam processos organizacionais e adaptação com uma estrutura que serve os princípios do processo de assimilação-acomodação de Piaget, e causar a mudança de estrutura, desenvolvimento e aprendizagem. O conteúdo da proposta são contextualizadas e organizada de acordo com uma sequência lógica de um livro. Finalmente, a proposta foi experimentado e apreciado pelo teste t de Student com resultados positivos.

Palavras-chave: estratégias de ensino, aprendizagem significativa, derivada de uma função.

Fecha recepción: Diciembre 2015 **Fecha aceptación:** Julio 2016

Introducción

Hablar sobre la enseñanza de las matemáticas en México nos conduce a un camino que ha sido difícil y complejo, impregnado de fracasos y obstáculos tanto a nivel personal como institucional. Esto se puede observar a partir de los altos índices de reprobación en los niveles básico, medio superior y superior, así como en los reportes del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA), o los de la Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE), entre otros.

Dicha problemática en la enseñanza de las matemáticas ha sido documentada desde hace ya varias décadas; los programas maestros del tronco común del bachillerato tecnológico (Secretaría de Educación Pública, 1988) señalaban una serie de fracasos en la enseñanza de la matemática en general y mencionaban que la enseñanza tradicional del cálculo diferencial presenta grandes dificultades respecto a la apropiación significativa por parte de los alumnos del concepto de la derivada de una función. Al respecto, Artigue (1995, p. 97) señala:

> Es evidente que la enseñanza de los principios del cálculo es problemática. Numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencias sorprendentes, que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar de verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de esta parte de las matemáticas.

En el mismo sentido, Moreno (2005) reitera que la enseñanza del cálculo resulta bastante problemática. Aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a realizar algunas derivadas, tales acciones están muy lejos de una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las matemáticas. Ávila (1998, p. 1) dice sobre la enseñanza del cálculo que “no ha sido posible diseñar una estrategia que garantice que los estudiantes adquieran el adecuado nivel de dominio conceptual y metodológico para tener éxito en la resolución de problemas típicos de la disciplina”.

En referencia a la enseñanza del cálculo diferencial, Sánchez Matamoros et al., (2008), mencionan múltiples investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del lenguaje variacional y del cálculo diferencial e integral, señalando que tales investigaciones aunadas a la experiencia como profesores de cálculo, les han permitido comprobar la dificultad de enseñar y aprender tales conceptos. Por su parte, Zúñiga (2007) menciona que esta situación ha sido abordada en múltiples trabajos (Farfán, 1991 y 1994; Artigue, 1995; Dolores, 1999; y Salinas et al., 2002) que muestran argumentaciones teóricas y propuestas a fin de mejorar la calidad de los aprendizajes en la enseñanza de cálculo.
A partir de estos y otros estudios, la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial (DGETI), impulsó dos grandes reformas (2004 y 2008), las cuales permearon hasta los niveles superiores en todo el país. Sin embargo, a cinco años de iniciada la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS 2008) se observa que tanto en el Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios 226 (CBTis 226), como en el Centro Universitario del Sur (CUSur) de la Universidad de Guadalajara (UdeG), los alumnos no logran construir y apropiarse del concepto de derivada de una función, ni aplicar dicho conocimiento para solucionar diversos problemas, entre otros, de optimización; en ocasiones, los alumnos abordan los algoritmos matemáticos de derivación como una colección de reglas muy complejas (por momentos, sin significado) que tienen que memorizar y reproducir para aprobar la unidad correspondiente de aprendizaje.

Los promedios de aprovechamiento obtenidos en el examen departamental de cálculo en el CUSur a lo largo de dos semestres —ciclos 2012B y 2013A— han sido respectivamente de 35 y 48, con un índice de reprobación de 56 % y 64 %.

Se observa también que con frecuencia tanto los libros de texto como los profesores, inician con la definición de un concepto para continuar con una serie de ejemplos, manteniendo a los alumnos como espectadores en la repetición de una serie de algoritmos. Aunado a esto, se tienen muchos antecedentes de docentes en los niveles medio superior y superior cuyos alumnos no cuentan con los conocimientos previos necesarios para la comprensión de la derivada de una función.

En este trabajo se presentan los resultados de la aplicación de una estrategia didáctica basada en el constructivismo, que inició con el diseño de una serie de problemas de optimización y continuó con la resolución de los mismos por parte de los alumnos. Con ella se promueven la comprensión y apropiación del concepto *derivada de una función* a través de situaciones problema del área de interés profesional de los alumnos.

Para poder abordar lo mencionado se dividió el presente análisis en tres apartados: en la primera parte se presentan los fundamentos teóricos que sustentan la propuesta didáctica, en la segunda parte se presenta el diseño metodológico que se siguió para contrastar las variables así como para implementar la propuesta en un grupo experimental de 45 alumnos del bachillerato tecnológico, y en la tercera parte se presenta la evaluación de los resultados y su contraste con un grupo (control) de alumnos de la misma institución donde no se trabajó dicha estrategia. Para fines prácticos, la estrategia didáctica que se diseñó e implementó se presenta en el apartado de anexos.

Objetivo general: determinar el efecto que tiene la estrategia didáctica diseñada para el aprendizaje del concepto de derivada de una función.

Hipótesis: existe diferencia significativa en la apropiación del concepto *derivada de una función*, al implementar la estrategia didáctica diseñada respecto a la apropiación lograda con la manera tradicional de la enseñanza del cálculo diferencial.

Revisión de la literatura

El conocimiento siempre es un estado transitorio de un proceso; conocer es asimilar y no copiar. Asimilar, de acuerdo a Glasersfeld (1997), significa sobre todo interpretar, dar significado a una experiencia nueva construida a partir de los esquemas cognitivos del sujeto. En este apartado presentamos algunos de los conceptos básicos relacionados con la construcción de conocimientos a partir de aprendizajes significativos.

Los contenidos en una situación problema

Un esquema cognitivo puede ser un concepto o un patrón de acción; en un esquema siempre está presente un mecanismo de reconocimiento y cierta expectativa sobre los resultados esperados por la activación del esquema. Si los resultados obtenidos son compatibles con los esperados, entonces dicho esquema se hace más estable y confiable; sin embargo, puede ocurrir que frente a una nueva situación un esquema no responda adecuadamente, entonces el esquema cognitivo se desequilibra y surge la necesidad de responder a la perturbación. Esto se logra mediante la modificación del esquema en cuestión, es decir, la *acomodación,* que da lugar a la re-equilibración del sistema. Así, se observa que el aprendizaje consiste en la consolidación de los esquemas cognitivos (patrones de acción, conceptos, teorías, etcétera) y en la generación de otros nuevos a partir de los desequilibrios existentes, una vez que estos resultan insuficientes para abordar nuevas tareas.

Una de las variables que inciden en el aprendizaje de los conceptos —en particular en aquellos de carácter matemático— es la forma en que son presentados por el profesor en el contexto del aprendizaje escolar, donde dichos conceptos se estructuran y aplican de manera específica como parte del diseño de la enseñanza del conocimiento disciplinar en el aula. A este proceso Chevallard (1996) lo describe como “transposición didáctica”.

Por ejemplo, durante la enseñanza del cálculo diferencial un concepto esencial como “la derivada de una función”, puede ser entendido por los estudiantes únicamente como una “operación” si la actividad en el aula se encuentra centrada en la manipulación de símbolos a través de reglas y fórmulas. Una enseñanza de este tipo incide en una débil construcción de significados sobre los conceptos.

Para poder comprender de manera más profunda el concepto anterior, los estudiantes se apropian de su significado como razón de cambio instantánea o como la pendiente de una recta tangente a la curva en un punto dado, lo cual también representa una velocidad instantánea de aumento o descenso en fenómenos cuya variación sigue un patrón dado por la función.

Así pues, para promover que los estudiantes se apropien del concepto *derivada de una función*, se reconoce que se debe promover el aprendizaje significativo a partir de la resolución de situaciones problema. Zúñiga (2007) concuerda con la idea de que el estudio matemático tanto de fenómenos del mundo real como del matemático, coloca al que aprende ante situaciones problema. Al respecto, Douady (1993, p 5) refiere:

> Un alumno tiene conocimientos de matemáticas si es capaz de provocar su funcionamiento como herramientas explícitas en los problemas que debe resolver, haya o no indicadores en la formulación, y si es capaz de adaptarlos cuando las condiciones habituales de empleo no son exactamente satisfechas, para interpretar los problemas o plantear cuestiones a su respecto.

En este sentido, Buendía y Ordoñez (2009) señalan la construcción de bases de significación para conceptos de cálculo y precálculo a partir del desarrollo de estrategias propias de un pensamiento y lenguaje variacional, en particular para la apropiación significativa de la derivada de una función. Al respecto, mencionan que estudiar el qué es lo que varía, mientras que el cómo en fenómenos cambiantes permite dotar a la derivada de significados que se alejan del manejo de fórmulas de derivación, algo a lo cual se suele limitar su enseñanza.

Por su parte, Cantoral y Farfán (1998) señalan el manejo simultáneo y coordinado de las derivadas sucesivas como una condición sin la cual la formación de la idea de derivada deviene frágil; sin embargo, el presente trabajo aborda la relación entre dos magnitudes que varían y se relacionan funcionalmente y en donde la variación de una depende de la otra, a partir de lo que Camarena (2000, p. 23) nombra matemática en contexto. Al respecto, señala:

> La matemática en contexto ayuda al estudiante a construir su propio conocimiento de una matemática con significado, con amarres firmes y no volátiles; asimismo, refuerza el desarrollo de habilidades matemáticas mediante el proceso de resolver problemas vinculados con los intereses del alumno.

Zúñiga (2007) describe las características de cada fase en el procesamiento de la información sobre las *funciones cognitivas* de Feuerstein que aparecen en el acto mental de aprendizaje implicado en la resolución de un problema. El autor identifica tres fases en la apropiación de un concepto a partir de la resolución de una situación problema:

- *Fase de entrada.* La comprensión implica para el alumno entender con claridad tanto los datos que se ofrecen en la información inicial, como el estado final o meta a la que se desea llegar. Para el logro de la percepción clara es necesario que las funciones cognitivas de exploración sistemática de una situación de aprendizaje, surjan en forma eficiente.
- *Fase de elaboración.* Implica la búsqueda de alternativas de solución que conecten el estado inicial con la meta a lograr (la resolución de la situación problema), pero antes es necesario que el sujeto sea capaz de percibir y definir con precisión el problema, lo cual implica que su función cognitiva de percepción y definición de este surja en forma eficiente. Dicho momento constituye el enlace entre la comprensión de la situación problema y lo que es propiamente la resolución del problema.
- *Fase de salida.* La respuesta ha de emitirse utilizando un lenguaje claro y preciso en función de la meta final del problema formulado, es decir, se debe observar una comunicación explícita de tal respuesta (pp. 153-154).

Se reconoce también la necesidad de promover la reflexión profunda sobre el concepto y no el mero tratamiento como una herramienta instrumental, lo cual permite que los alumnos sean capaces de aplicar tal concepto para solucionar problemas de su interés. Con respecto a lo anterior, Godino y Recio (1998) apuntan que el significado se desprende de las acciones que el estudiante ejecuta sobre los objetos matemáticos, a las que denominan "prácticas prototípicas significativas".

También se sabe que en la mayoría de los conceptos matemáticos pueden intervenir distintos dominios o marcos de representación: físico, geométrico, numérico, grafico (Douady, 1993); más aún, para llegar a una comprensión profunda y duradera es recomendable promover la manipulación del objeto matemático desde diversos marcos de representación.

En la epistemología genética desarrollada por Piaget, de acuerdo a diversos autores como Woolfolk (1996), Moreno (1998), García (2006) y Serulnicov (2010), el aprendizaje tiene lugar desde dos principios fundamentales: "asimilación y acomodación". *La asimilación* de un objeto o una situación *comporta una interpretación*, la cual es necesaria *para hacer admisible el objeto* a fin de ser procesado por la estructura cognitiva *(acomodación)*, el resultado de este proceso es una forma de conocimiento que no es resultado de "copiar" el dato externo (la realidad) tal como se nos presenta a los sentidos. El supuesto fundamental es que los seres humanos construyen, a través de la experiencia, su propio conocimiento y no simplemente reciben la información procesada para comprenderla y usarla de inmediato. El conocimiento es el resultado de una construcción incesante a partir del mundo de nuestras experiencias.

Con la obra de Piaget ha quedado claro que el constructivismo permite el desarrollo de la capacidad de realizar aprendizajes significativos en la creación de “situaciones de aprendizaje” que enfaticen la actividad reflexiva del sujeto que aprende. Justamente esta posición corresponde a la estrategia que se propone, la creación de situaciones de aprendizaje con una intencionalidad clara y precisa; se trata de recrear una condición problema para que los estudiantes puedan interactuar con el objeto de conocimiento y en el proceso se apropien de él.

De acuerdo con las ideas expresadas por Glasersfeld (1997, p. 2), “tanto biólogos como físicos reconocen que las estructuras conceptuales que consideramos como *conocimiento*, son los productos de conocedores activos que dan forma a su pensamiento para ajustarse a las restricciones que experimentan”. Entonces se trata de enfrentar al alumno a una situación problema a fin de promover paso a paso la reconstrucción de un concepto, el cual se sostiene en un andamiaje previo, por lo cual resulta necesario garantizar una comprensión de ciertos conceptos básicos y un dominio de ciertas habilidades básicas que hagan posible por parte de los alumnos la construcción del concepto *derivada de una función*.

Estrategia didáctica

De acuerdo con Piaget et al. (1977), el planteamiento del problema y su estructura específica permite que se generen conflictos cognitivos que el estudiante intentará resolver desde los esquemas que posee, para luego asimilarlos; es decir, tratará de resolver el problema utilizando para ello los conocimientos y recursos que tiene, y de ser necesario su esquema cognitivo se modificará para acomodar la situación a la que se enfrentó. Las acciones que se promueven (pasos para resolver el problema) llevan al sujeto en dos direcciones posibles: reafirmar algo que ya sabe o bien reestructurar sus esquemas y dar significado a una experiencia nueva, de tal modo que el conocimiento sea a la vez tiempo, resultado, punto de partida y proceso.

En otras palabras, en el esquema siempre están presentes un mecanismo de reconocimiento y cierta expectativa sobre los resultados esperados por la activación del esquema. Si los resultados obtenidos (luego de accionar sobre el problema) son compatibles con los esperados, entonces dicho esquema se hace más estable, pero puede ocurrir que frente a una nueva situación (problema o parte de ese problema) un esquema no responda adecuadamente, entonces el esquema cognitivo se desequilibra (esta es justamente la propuesta, desequilibrar al sistema a partir de una situación problema que se tiene que resolver), y surge la necesidad de responder (resolver) a la perturbación. Esto se logra mediante la modificación del esquema en cuestión, esto es la *acomodación*.

La experiencia cognitiva de los seres humanos no se limita a su interacción con las cosas materiales, sino que incluye los resultados de la interacción con las demás personas de su entorno social. En el proceso de resolución de problemas de optimización, se propone que los estudiantes formen equipos de tres elementos y desarrollen un trabajo colaborativo, ya que de acuerdo a Moreno (1998, p. 169), "la interacción con los otros —en especial cuando las formas de actuar y los medios disponibles para tal acción resultan insuficientes— aparece como una de las fuentes principales de desequilibrio cognitivo y, en consecuencia, de aprendizaje".

Metodología

Se trabajó con una metodología procedimental basada en la resolución de problemas de optimización como actividad central. Asimismo, se tuvo especial cuidado en que las situaciones problema contaran con una estructura lógica, estableciendo vínculos entre las estructuras cognitivas previas y el contenido nuevo a adquirir. La disposición del alumno para aprender es importante, por lo cual los problemas se relacionan con su realidad inmediata, considerando que si les encuentra sentido y aplicación práctica entonces le serán más atractivos.

Tipo de investigación. Transversal de corte cuantitativo mediante la aplicación de un test.

Instrumentos. El test está conformado por ocho preguntas abiertas que requieren que el alumno manifieste la comprensión de los conceptos necesarios para la construcción del concepto de derivada de una función. Una vez que se obtuvieron las respuestas, se valoraron contrastándolas con los significados institucionalizados en diversos libros de texto, y el resultado del test se valoró de cero a 100 puntos. Por otro lado, se estableció mediante un análisis estadístico el nivel de significación entre los resultados obtenidos al trabajar con los dos grupos, uno experimental "A" y otro de control "B".

Universo. El universo fue conformado por la población escolar que cursó el cuarto semestre en el Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios de Ciudad Guzmán, Jalisco, México (CBTis No. 226).

Muestra. Se asignaron aleatoriamente dos grupos, los cuales fueron determinados por el jefe del departamento de servicios docentes de la institución. El experimento se realizó durante los meses de febrero, marzo, abril y mayo, y se trataron dos grupos muestra de diferentes especialidades; el grupo que trabaja con la metodología propuesta fue denominado experimental "A" (44 alumnos) y el que trabajó con la metodología tradicional fue llamado de control "B" (46 alumnos). En el grupo experimental se conformaron equipos de manera aleatoria, los estudiantes de cada equipo permanecen en él durante el desarrollo del experimento para lograr su integración y para favorecer la negociación de significados nuevos.

Análisis estadístico (de la aplicación de la propuesta)

Los resultados de este trabajo se analizaron con el programa estadístico SPSS versión 15 (Chicago, IL, USA). Para corroborar la existencia de diferencias estadísticas se utilizó la prueba t-student a un nivel de significancia $p \leq 0.05$.

Resultados

Se compararon los promedios obtenidos como resultado de la aplicación de un test elaborado con la intención de que el alumno manifieste la comprensión de los conceptos necesarios para la construcción del concepto de derivada de una función. El grupo que trabajó con la metodología experimental obtuvo una media de 60.29± con un error típico de 3.8 puntos, mientras que en el grupo que trabajó con la metodología tradicional (control) la media fue de 24.12 con un error típico de 3.41. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Grupo	N	Media	Desviación típica	Error típico de la media
Control	39	24.1282	21.3112	3.41252
Experimental	44	60.2955	25.40608	3.83011

Tabla 1. Valores descriptivos

Se encontraron diferencias estadísticamente significativas en los promedios obtenidos entre el grupo control y el grupo experimental (p=0.000). La diferencia entre las medias muestrales (ver figura siguiente), no es producto del error de muestreo. Se puede decir que en las condiciones en las que se desarrolló el estudio, la propuesta metodológica fue determinante para que los alumnos se apropiaran del concepto de derivada de una función.

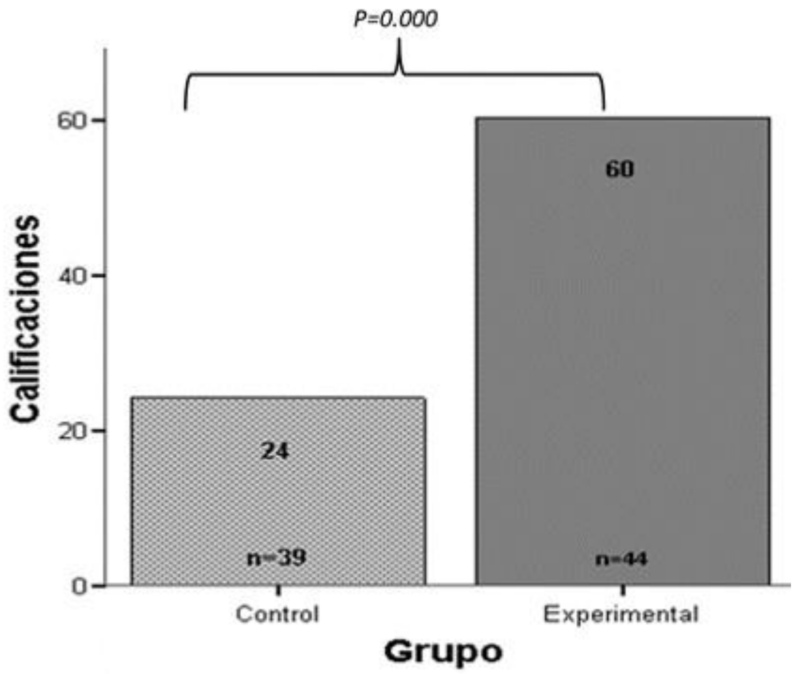

Figura 1. Significancia estadística (elaboración propia).

Respuesta global al problema

A partir de los resultados obtenidos en la presente investigación es posible afirmar que utilizando la metodología propuesta en el grupo experimental, los alumnos del cuarto semestre del bachillerato tecnológico se apropian del concepto de derivada de una función y desarrollan las habilidades correspondientes para la resolución de problemas de optimización que involucran cálculo diferencial.

Discusión

Se observó evidencia suficiente para afirmar que a través de la estrategia didáctica que se utilizó en el grupo experimental, los alumnos:

- Se apropian de los elementos necesarios que les permiten elaborar e interpretar diversos registros de representación de funciones.
- Reconstruyen un proceso a través del cual pueden elaborar e internalizar el concepto de derivada y se apropian del mismo, y comprenden y aplican el conocimiento adquirido en la resolución de problemas de optimización.
- Desarrollan estrategias de trabajo en equipo y de liderazgo.

De acuerdo con las observaciones y registros realizados, se puede afirmar que la estrategia didáctica basada en la resolución de problemas de optimización representa una importante opción para promover que los estudiantes logren un aprendizaje significativo de la derivada de una función, y al mismo tiempo favorece la internalización de procesos de pensamiento ordenados y sistemáticos (organización y estructura) que mejoran la actividad de los estudiantes, su motivación intrínseca y los acerca a la adquisición duradera de habilidades y actitudes que prevalecerán en el continuo de su preparación académica y profesional.

Para complementar los datos reportados, adelantamos que los alumnos mostraron habilidades tales como tomar notas, rescatar lo importante, relacionar conceptos, organizar el tiempo, describir verbalmente lo que se hace, entender antes de resolver, dibujar, utilizar problemas modelo, cambiar de marcos de representación, explorar el problema, ser flexibles en el proceso, aprender del error, ubicarse en el contexto, identificar, esquematizar, descubrir relaciones, todo lo cual si bien no se desarrolló a partir del trabajo con la estrategia didáctica, sí invita a la indagación detallada.

Contraste de los fundamentos con los principales resultados del trabajo

- Al matematizar situaciones de la cotidianidad como un proceso para trabajar la realidad a través de ideas y conceptos matemáticos, se realizó tal trabajo en dos direcciones opuestas: a partir del contexto crearon esquemas, formularon y visualizaron los problemas, se descubrieron relaciones y regularidades, se hallaron semejanzas con otros problemas. Y al trabajar matemáticamente hallaron soluciones y propuestas que se proyectaron sobre la realidad para analizar su valor y significado.
- La estructura de los problemas que resolvieron los estudiantes favorece el paso por las etapas, que van desde la lectura del enunciado hasta la formulación de la respuesta, pasando por el diseño y ejecución de un plan que resultó ser orientador de la actividad sugerida. En este contexto se favoreció la interacción de los marcos aritmético, geométrico y algebraico.
- Se lograron aprendizajes significativos, ya que los estudiantes establecieron vínculos entre los conocimientos previos residentes en su estructura cognitiva y los nuevos contenidos plasmados de manera ordenada en los problemas que resolvieron.
- Se propusieron aprendizajes de modo inductivo y el profesor mantuvo una actitud orientadora, permitiendo el descubrimiento orientado de lo simple a lo complejo.
- La estrategia planteada permitió mantener una relación estrecha entre el aprendizaje y el desarrollo cognitivo; los alumnos, al interactuar con la realidad, generaron conflictos cognitivos que favorecieron el proceso de auto-estructuración.
- Al resolver los problemas en equipos, se consideró la dimensión social del aprendizaje, el cual es una negociación intersubjetiva de significados que se construyen en la interacción de los alumnos con sus compañeros y con el profesor. Este último se manifestó esencialmente como promotor de la interacción entre los sujetos cognoscentes y los objetos cognoscibles.

Conclusión

El análisis cuantitativo arrojó respuestas positivas con respecto a la apropiación del concepto de derivada de una función. Sin embargo, es importante señalar que existen múltiples relaciones y aspectos por explorar desde el enfoque cualitativo; por ejemplo, los valores interiorizados por los alumnos, el grado de significación de los conceptos, las habilidades de liderazgo, entre otros. Además, se sabe que el conocimiento es siempre parcial, temporal y perfectible, un proceso continuo en construcción, y también que cada grupo y cada alumno es diferente. A partir de estas premisas se pueden mencionar las siguientes limitantes:

- Resistencia al cambio por parte de algunos alumnos que prefieren que el profesor les explique, mientras que ellos se limitan a tomar notas y seguir instrucciones.
- Dificultad para desarrollar el trabajo en equipo.
- El trabajo propuesto funcionó en un contexto determinado, pero no es seguro que funcione igual en otros contextos.
- En algunos casos la generalización a partir del proceso inductivo no se da en su totalidad, así que algunos alumnos no alcanzan a ver más allá de la situación particular tratada.
- Para algunos alumnos los problemas no fueron de su interés personal, ni profesional.
- Suspensiones oficiales y no oficiales de clases (fuera de las programadas al inicio de cada semestre) que alteraron negativamente la planeación del curso.
- Impuntualidad o inasistencia de algunos alumnos, lo cual afectó el desarrollo previsto del proceso.

Las situaciones propuestas están enfocadas en problemas del área económico-administrativa, sin embargo, pueden diseñarse situaciones similares para emplear esta metodología en prácticamente cualquier otra área, por ejemplo, en programas del área médico-biológicas o en las áreas de ingeniería, mecánica, física, etcétera. En general, los alumnos del grupo experimental lograron una mayor comprensión de los conceptos, un mejor desarrollo de procedimientos y una considerable mejoría en su actitud hacia el estudio y hábitos de trabajo, que pueden estudiarse mejor desde el enfoque cualitativo.

Bibliografía

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de educación* 43, pp. 85-101.

Artigue M., Douady R., Moreno L. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*, México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 97-140.

Ausubel, D. y Novak, J. (1990), *Psicología educativa.* México: Trillas.

Ávila, G. R. (1998). *La enseñanza del cálculo*, Disertación doctoral no publicada, Universidad de Sonora: México.

Buendía, G., y Ordóñez, A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *12*(1), 7-28.

Camarena, P. (2000). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación educativa*, 9 (46), 15-25, Instituto Politécnico Nacional. México. Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894003.pdf

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Épsilon 42* (3), 854-856.

Cantoral, U. R. (2012, noviembre). Conferencia plenaria ¿Qué es la matemática educativa? Dictada el jueves 1 de noviembre de 2012 durante el XLV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Querétaro, México.

Covarrubias, F. (1992). El proceso educativo: un problema epistemológico de construcción de conocimiento. VII Encuentro Nacional de Investigación Educativa. Instituto Michoacano de Ciencias de la Educación. Morelia, México.

Chevallard, Y. (1996). *La transposición didáctica*. Barcelona: Aique.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Douady, R. (l993). Juegos de marcos y dialéctica herramienta-objeto, *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas* (escuela francesa). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México, D.F.

Farfán, R. M. (1991). El curso de precálculo: un enfoque gráfico. *Publicaciones Latinoamericanas en Matemática Educativa*. 5(1), 206-211.

Farfán, R. M. (1994). Ingeniería Didáctica en precálculo. Acerca de la puesta en escena de los resultados de investigación en el sistema de enseñanza. *Publicaciones Latinoamericanas en Matemática Educativa*. 8(1), 457-462.

García, G. (2006) (reimp. 2010). *Piaget, la formación de la inteligencia*. Biblioteca Grandes Educadores. Ed. Trillas, México.

Glasersfeld, V. (1997). *Homage to Jean Piaget* (1896-1980). Home: Ecology of mind. Recuperado de: http://www.oikos.org/Piagethom.htm

Godino, J., Recio, A. (1998). Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en educación matemática en Olivier, A. y Newtead, K. (eds.). Proceedings of the 22th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, v. 3, University of Stellenbosch, South Africa, 1-8.

Moreno, A. (1998). La enseñanza de la matemática: un enfoque constructivista. *Piaget en la educación. Debate en torno a sus aportaciones*. Paidós Educador, 1ª reimpresión, México, 2007, pp. 165-193.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo. Evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralba (eds.), IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Córdoba, España: Universidad de Córdoba, pp. 81-96.

Piaget, J. (1971). *Science of education and the psychology of the child.* New York: Viking Press (*Psychologie et pédagogie*, 1969).

Piaget, J. (1977). Prólogo. En J.C. Bringuier, *Conversaciones libres avec Jean Piaget*, París: Editions Laffont.

Piaget, J., Inhelder, B., García, R., y Vonéche, J. (comps.) (1977). *Epistémologie génetique et équilibration*, Neuchatel-Paris-Montréal, Delachaux & Niestlé.

Salinas, P., Alanís, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., y Garza, J. L. (2002). *Elementos del cálculo. Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza.* México: Trillas.

Sánchez–Matamoros, G., García M., Llinares S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(2), 267-296.

SEP, SEIT, COSNET (1988). Programas maestros del tronco común del bachillerato tecnológico, volumen I, segunda parte: matemáticas.

SEP, SEIT (1996). Propuestas para la reforma académica del bachillerato tecnológico. Diagnóstico académico del bachillerato tecnológico, México D. F., marzo de 1996, pp. 21-25.

Serulnicov, A. y Suaréz, R. (2010). *Jean Piaget para principiantes*. Era Naciente SRL. Buenos Aires, Argentina.

Woolfolk, A. (1996). *Psicología educativa*. Sexta edición. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

Zúñiga, L. (2004). Funciones cognitivas: un análisis cualitativo sobre el aprendizaje del cálculo en el contexto de la ingeniería. Tesis de doctorado, Cicata-IPN, México.

Zúñiga L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10 (1), 145-175. Recuperado de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33500107> ISSN 1665-2436

Anexo

Por cuestiones de espacio se describe solo uno de los cinco problemas elaborados en la propuesta.

Problema

El responsable de la cafetería del plantel estima un costo de elaboración por cada desayuno que prepara en $\$10.^{00}$, también estima sus costos fijos por conceptos de renta, energía eléctrica, impuestos, empleados, etcétera, en $\$300.^{00}$ diarios. El encargado de la caja ha observado que vendiendo cada desayuno en $\$16.^{00}$ la demanda es de 140 desayunos, pero cuando el precio sube hasta $\$22.^{00}$ la demanda baja a 80 desayunos.

¿Cuánto será la mayor ganancia posible a lograr?, ¿cuál será el mejor precio de venta, de tal manera que le permita obtener las mayores ganancias?, ¿cuántos desayunos venderá a ese precio? y ¿a partir de un detallado análisis qué recomendaciones o comentarios se podrían hacer?

Primera parte

1.- Lee cuidadosamente y comprende el problema. Separa los valores conocidos y determina cuál es la incógnita, ¡escríbela!

2.- Necesitamos un plan para resolver este problema. Construiremos la función de utilidades, (en su expresión algebraica). Relaciona "x" tortas vendidas con "U" utilidades, esta es la parte principal del plan que nos permitirá saber cuándo obtendremos mayores utilidades. Te guiaremos en este camino.

3.- A partir de la información dada establece la función de costos por día (a cuánto ascienden sus gastos o costos por día) y grafícala. **C = m x + b**. Donde "**m**" es el costo de elaborar cada desayuno y "**b**" es el costo fijo.

4.- Con la información dada establece la expresión algebraica (función) que relacione precio "p" y ventas "x" y traza la gráfica correspondiente. Nota: considera en esta ocasión que por conveniencia el precio depende del número de desayunos vendidos. Puedes plantear la expresión del siguiente modo: $P - P_1 = m\,(x - x_1)$ en donde $m = \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}$ "P" estará en función de "x".

5.- Con las dos ecuaciones anteriores establece la función de utilidades considerando que las utilidades son ingresos menos costos. **U = I – C** (Ingresos = No. de desayunos "x" por "P" precio de cada desayuno). **U = I – C = x P – C.** Atención, "P" precio lo tomas de la segunda función paso 4 y "C" costo de la primera función paso 3.

Desarrollando el plan

6.- Traza la gráfica correspondiente de la función de utilidades, ubicando en el eje de las abscisas la variable "x" y en el eje de las ordenadas la variable "U". Observa que "U" es función de "x", o sea U depende de x, dicho de otro modo *U=f(x).*

7.- En el punto (20, 60), ¿la curva de *U*= "***f (x)***"está creciendo o decreciendo?

8.- En el punto (110, 690), ¿la curva ***f (x)*** está creciendo o decreciendo?

9.- Traza una recta tangente a la curva de f(x) con la condición de que la pendiente de esta recta tangente sea cero.

10.- Escribe cual es el punto en la curva en el que tendrás máximas utilidades. Para hallar este punto, ¿qué tuviste que hacer?

11.- Traza una recta tangente a la curva por un punto cualquiera. ¿Puedes determinar qué dirección tiene la curva en ese punto?, ¿conoces algún método para determinar esta dirección?

12.- ¿Para qué crees que te sirve en este caso conocer la dirección de la curva en un punto en particular?

13.- ¿Qué importancia podría tener conocer la pendiente de la curva en algún punto en particular?

14.- Toma el punto (x_1=20, U_1=60) de la función de utilidades ***y = f (x),*** luego asigna un incremento a "x_1" ("Δx") de una unidad $x_2 = x_1+\Delta x = 21$ y calcula el respectivo valor de $U_2 = f(x_1 + \Delta x)$. Observa que también $U_2 = U_1 + \Delta U$. Observa que en este punto al aumentar x, también aumenta U.

15.- Como obtendrás dos puntos (x_1, u_1) y (x_2, u_2) traza una "recta secante" que pase por esos dos puntos y calcula su pendiente $m = \frac{U_2 - U_1}{x_2 - x_1}$

16.- Manteniendo fijo el punto (x_1, y_1) ahora incrementa a "x" "Δx", de tal modo que el incremento sea más pequeño que el anterior. Por ejemplo, Δx = ½ calcula nuevamente el respectivo valor de U_2, calcula también ΔU y la pendiente de la recta secante que pasa por estos dos puntos (x_1, U_1) y el nuevo (x_2, U_2).

17.- Repite el paso anterior algunas veces más, ayúdate con la siguiente tabla. Utiliza la función de utilidad que determinaste en el paso número 5.

x_1	x_2 (x_1+Δx)	$\Delta x = x_2 - x_1$	U_1	U_2	$\Delta U = U_2 - U_1$	$m = \Delta U / \Delta x$
20	21	1	60	75.9	15.9	15.9
20	20.5	½ = 0.5	60			
20	20.2	$\frac{1}{5} = 0.2$	60			
20	20.1	$\frac{1}{10} = 0.1$	60			
20	20.01	$\frac{1}{100} = 0.01$	60			

18.- A partir de la tabla anterior se promueve que el alumno vaya haciendo los incrementos de la variable independiente cada vez más pequeños, hasta tender a cero. Al final se le pregunta que si de modo intuitivo podemos concluir que cuando el incremento "Δx" **tiende** a ser cero, ¿qué valor tendrá la pendiente $m = \Delta u / \Delta x$? Si el alumno realizó la serie de pasos adecuadamente, ¡¡Felicidades, ha calculado de modo intuitivo aritmético y puntual la (derivada) pendiente de la recta tangente a la curva de la función de utilidades en el punto (20, 60)!!

Segunda parte. Generalizando: la derivada en un plano algebraico

1.- Considera fijo el punto (25, 137.5) y completa la siguiente tabla igual que la anterior. Observa que:

- $f(x_1)$ corresponderá a U_1, por lo tanto $f(x_1 + \Delta x)$ corresponderá a U_2
- $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ es igual a ΔU, por lo tanto $\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$ es igual a $m = \Delta u / \Delta x$
- Recuerda que nuestra función objetivo es $U = -\frac{x^2}{10} + 20x - 300$

x_1	$x_2 = (x_1+\Delta x)$	Δx	$f(x_1) = U_1$	$f(x_1+\Delta x) = U_2$	$f(x_1+\Delta x)-f(x_1)$	$\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} = m = \frac{\Delta U}{\Delta x}$
25	26	1	137.5	152.4	14.9	14.9
25	25.5	½ = 0.5				
25	25.2	$\frac{1}{5} = 0.2$				
25	25.1	$\frac{1}{10} = 0.1$				
25	25.01	$\frac{1}{100} = 0.01$				

2.- Dado que $m = \Delta u / \Delta x$ escribe el valor que tendrá la pendiente en el punto (25, 137.5) cuando el Δx tienda a cero.

¡¡Felicidades, ahora has calculado de modo aritmético la pendiente de la recta tangente a la curva de la función de utilidades en el punto (25, 137.5)!!

3.- Las pendientes en el punto (20, 60) y (25, 137.5), ¿fueron iguales o desiguales?, ¿qué significa esto?

Después reflexiona sobre el siguiente concepto:

Atención: la derivada de una función es la tangente del ángulo de inclinación de la curva en un punto, es decir, es la pendiente de la recta tangente en ese punto; esto nos permite saber la dirección de la curva en tal punto. <u>Geométricamente la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto dado</u>.

Proceso algebraico para encontrar la pendiente de una recta tangente a la curva en cualquier punto

A continuación encontraremos la derivada "algebraicamente" de nuestra función de utilidades en estudio. $U_1 = -\frac{x^2}{10} + 20x - 300$ Observa que: *f(x)* es U_1

f(x+ Δx) corresponde a $U_2 = -0.1(x+\Delta x)^2 + 20(x+\Delta x) - 300$

- *f(x+ Δx) – f(x)* es igual a $U_2 - U_1 = \Delta U$ (se deja al alumno realizar la resta)
- $\Delta U = -0.2x\Delta x - 0.1\Delta x^2 + 20\Delta x$ si se divide esta expresión entre el incremento de la variable independiente Δx, entonces $\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = -0.2x - 0.1\Delta x + 20$
- Si el Δx tiende a cero, entonces $\frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta U / \Delta x = m = -0.2x + 20$

La función obtenida g(x) $= -0.2x + 20 = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta U / \Delta x = m$ es la función derivada de la función $U = -0.1x^2 + 20x - 300$ se le representa por $U' = -0.2x + 20$

"<u>esta función *derivada"* $U' = -0.2x + 20$</u> <u>permite hallar el valor de la pendiente de toda recta tangente que se puede trazar en cualquier punto de la curva de utilidades, y conocer la dirección de tal curva. Si crece o decrece, tiene un valor máximo o uno mínimo</u>.

Parte tres. Gráfica de la derivada (plano geométrico)

En esta sección se promueve que los alumnos logren una representación gráfica de la función y de la derivada de esta en un mismo plano y luego hagan el análisis correspondiente con algunas acciones como las siguientes:

1.- En el mismo plano que trazaste la gráfica de la función de utilidades, $U = -0.1x^2 + 20x - 300$, traza la gráfica de la función derivada $U' = -0.2x + 20$

2.- Compara las dos gráficas y responde a las siguientes preguntas:

- ¿Qué pasa en la gráfica de utilidades U cuándo la gráfica derivada U' es positiva?
- ¿Qué pasa cuando la derivada U' es negativa?
- ¿Qué pasa en la gráfica de utilidades cuando la gráfica derivada U' se hace cero?
- ¿Qué importancia tendrá el conocer el punto exacto donde la derivada se hace cero y cómo se podrá saber esto último?
- ¿Cómo interpretas tú personalmente la derivada?, ¿cómo lo expresarías con tus palabras?

- ¿Qué otras aplicaciones se te ocurren para la derivada?